

Основным результатом доклада является следующая теорема.

Теорема 1. Для величин оптимального восстановления (1) справедливы следующие утверждения.

(I) В случае $|\ln \delta| \geq \eta(z_0)$ справедливы равенства:

$$\mathcal{E}_O(\delta) = \mathcal{E}_B(\delta) = \mathcal{E}_L(\delta) = \kappa(z_0) \delta^\alpha |\ln \delta|.$$

Экстремальными являются функции вида cf_δ , $|c| = 1$, и оптимальным методом восстановления в задаче (1) является функционал T_δ^1 .

(II) В случае $|\ln \delta| < \eta(z_0)$ справедливы следующие равенства:

$$\mathcal{E}_O(\delta) = \mathcal{E}_B(\delta) = \mathcal{E}_L(\delta) = \kappa(z_0) \delta^\alpha \frac{1}{2} \left(\eta(z_0) + \frac{\ln^2 \delta}{\eta(z_0)} \right).$$

Экстремальными являются функции вида cF_δ , $|c| = 1$.

(III) При $\delta = 1$ справедливы следующие равенства:

$$\mathcal{E}_O(1) = \mathcal{E}_B(1) = \mathcal{E}_L(1) = g'(z_0).$$

Экстремальными являются функции вида cg , $|c| = 1$, и оптимальным методом восстановления в задаче (1) является функционал T_1^1 .

Задачам оптимального восстановления на классах аналитических функций посвящена монография [1]. Близкие задачи оптимального восстановления оператора дифференцирования в пространствах Харди H^p , $1 \leq p \leq \infty$, функций, аналитических в полосе и кольце, рассматривались в работах [2], [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Osipenko K. Yu. Optimal recovery of analytic functions. Huntington, N.Y. : Nova Science, 2000.
2. Акопян Р. Р. Наилучшее приближение оператора дифференцирования на классе функций аналитических в полосе // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 60, № 1. С. 9–16.
3. Akopyan R. R. Approximation of the Differentiation Operator on the Class of Functions Analytic in a Ring // Ural Math. J. 2017. Vol. 3, № 2. P. 6–13.

УДК 511.14

АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА (АКЧ). 2. ВЫРАЖЕНИЕ АКЧ ЧЕРЕЗ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В. Д. Александров, О. В. Александрова

Донбасская национальная академия строительства и архитектуры
avd-crystal@mail.ru

Альтернативные комплексные числа (*АКЧ*) $R = u + vi$, имеющие модуль $[R] = u + v$, и аргумент $\psi = \text{Arg} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{v}{u}}$, выражены через гиперболические функции. Установлена связь параметров *АКЧ* с параметрами гиперболы, эллипса и окружности.

Альтернативные комплексные числа, модуль, аргумент, свойства, геометрическая интерпретация, гипербола, эллипс, окружность, гиперболические функции.

В работе [1] было введено понятие альтернативных комплексных чисел (**АКЧ**). Альтернативное комплексное число $R = u + vi$ изображается в плоскости отрезком прямой OM с проекциями на соответствующие оси x и yi , либо вектором $\vec{R} = \overrightarrow{OM}$ под углом ψ к оси x (рис. 1).

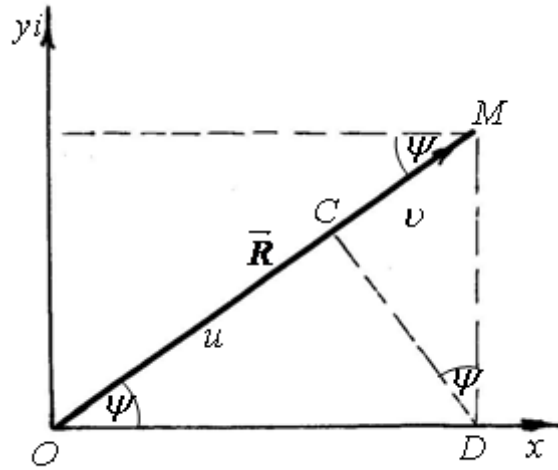


Рис. 1

Отрезок $|OC| = u$ связан с действительной осью x

$$u = x \cos \psi.$$

Отрезок $|CM| = v$ связан с мнимой осью yi

$$v = y \sin \psi.$$

Таким образом, в тригонометрической форме

$$R = x \cos \psi + yi \sin \psi, \quad [R] = x \cos \psi + y \sin \psi.$$

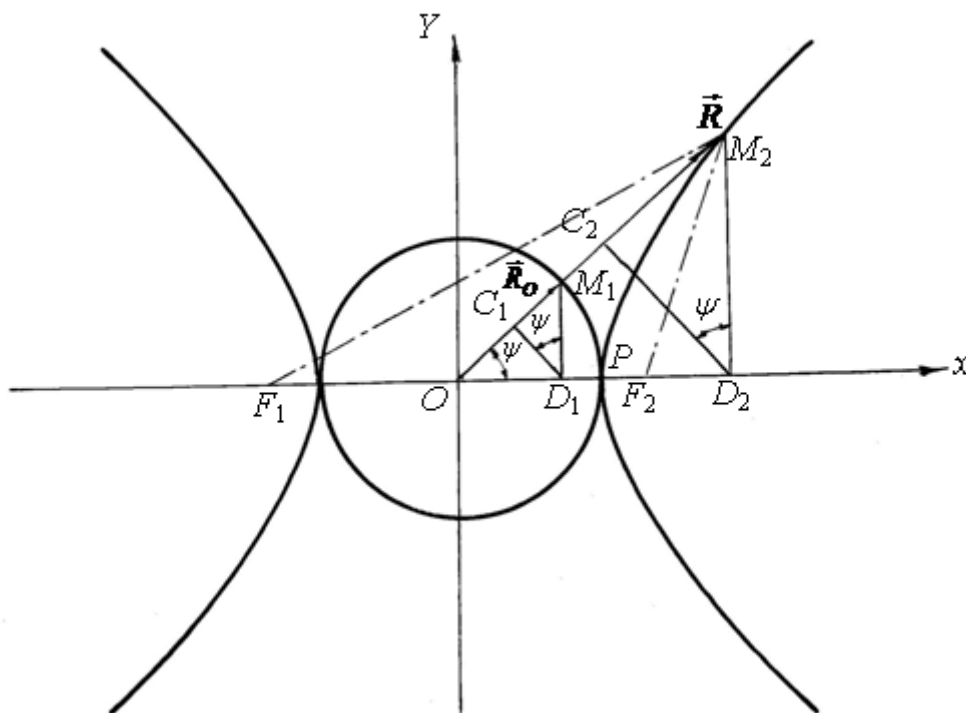
Угол ψ называется *аргументом АКЧ* и обозначается

$$\psi = \text{Arg} [R].$$

Так как $|OM| = [R] = u + v$, $|OC| = u$, $|CM| = v$, $|OD| = x$, $|DM| = y$, то $u = x \cdot \operatorname{ch} \psi$, $v = y \cdot \operatorname{sh} \psi$.

$$R = x \operatorname{ch} \psi + iy \operatorname{sh} \psi.$$

Для изображения комплексных чисел на гиперболе совместим окружность радиусом $R_O = |OM_1|$ и равностороннюю гиперболу (рис. 3).



Поскольку параметры альтернативного комплексного числа $R_1 = u_1 + v_1 i$ через окружность определяются в виде:

то аналогично параметры комплексного числа $R_2 = u_2 + v_2 i$ через равностороннюю гиперболу могут определяться в виде:

25

Это следует из $\triangle OM_1D_1$, где $[R_O] = |OM_1|$, $u_1 = |OC_1|$, $v_1 = |C_1M_1|$, $|OD_1| = x_1$, $|DM_1| = y_1$ и из $\triangle OM_2D_2$, где $[R] = |OM_2|$, $u_2 = |OC_2|$, $v_2 = |C_2M_2|$, $|OD_2| = x_2$, $|DM_2| = y_2$.

Следовательно, $u_1 = x_1 \operatorname{ch} \psi$, $v_1 = y_1 \operatorname{sh} \psi$, $\frac{v_1}{u_1} = \frac{y_1 \operatorname{sh} \psi}{x_1 \operatorname{ch} \psi} = \frac{y_1}{x_1} \operatorname{th} \psi$ и $u_2 = x_2 \operatorname{ch} \psi$, $v_2 = y_2 \operatorname{sh} \psi$, $\frac{v_2}{u_2} = \frac{y_2 \operatorname{sh} \psi}{x_2 \operatorname{ch} \psi} = \frac{y_2}{x_2} \operatorname{th} \psi$.

Поскольку $\frac{y_1}{x_1} = \operatorname{th} \psi$, то $\frac{v_1}{u_1} = \operatorname{th}^2 \psi$ и $\operatorname{th} \psi = \sqrt{\frac{v_1}{u_1}}$, а также $\frac{y_2}{x_2} = \operatorname{th} \psi$, то $\frac{v_2}{u_2} = \operatorname{th}^2 \psi$ и $\operatorname{th} \psi = \sqrt{\frac{v_2}{u_2}}$.

Для изображения комплексных чисел на равносторонней гиперболе важно показать, что аргумент ψ , определяемый по окружности $\psi = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{v}{u}}$, равен аргументу ψ , определяемому по гиперболе $\psi = \operatorname{arth} \sqrt{\frac{v}{u}}$. Для этого рассмотрим гиперболические и круговые сегменты, показанные на рис. 4 а, б [2].

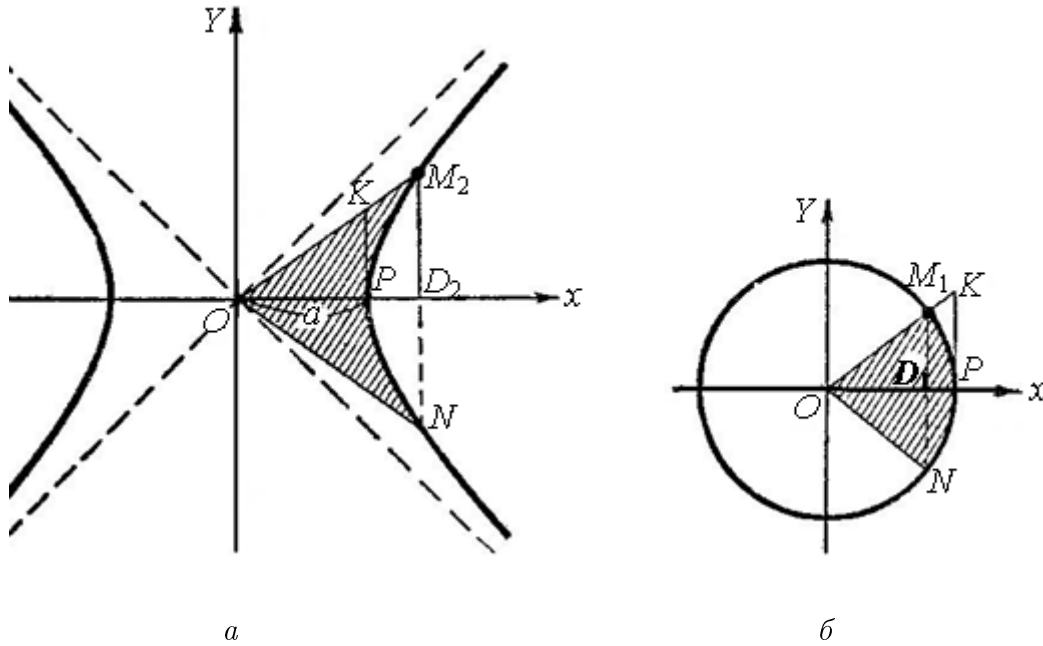


Рис. 4

Обозначим через $\frac{S}{2}$ площадь гиперболического сектора M_2OP (рис. 4, а) и припишем величине S (площади двойного сектора) знак, который имеет угол поворота ψ . Тогда отношения направленных отрезков DM_2 , OD_2 , PK (построенных для точки M_2 гиперболы) аналогичны отношениям отрезков DM_1 , OD_1 , PK на окружности. Полуось a выра-

жается через S следующим образом

$$\frac{|DM_2|}{a} = \operatorname{sh} \frac{S}{a^2}; \quad \frac{|OD_2|}{a} = \operatorname{ch} \frac{S}{a^2}; \quad \frac{|PK|}{a} = \operatorname{th} \frac{S}{a^2}. \quad (1)$$

Эти соотношения получаются из рассмотрения площади сегмента POM_2 и площади треугольника $\triangle OM_2D_2$:

$$\begin{aligned} \text{пл. } PM_2O &= \int_a^x \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} = \\ &= \frac{xy}{2} - \frac{a^2}{2} \ln \frac{x + y}{a}, \quad \text{пл. } \triangle OM_2D_2 = \frac{xy}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда пл. } M_2PD_2 = \text{пл. } \triangle OM_2D_2 - \text{пл. } PM_2O = \frac{a^2}{2} \ln \frac{x + y}{a} \text{ или}$$

$$S = 2 \cdot \text{пл. } M_2PD_2 = a^2 \ln \frac{x + y}{a}.$$

Решая это уравнение совместно с каноническим уравнением гиперболы $x^2 - y^2 = a^2$, находим

$$\frac{x}{a} = \frac{e^{S/a^2} + e^{-S/a^2}}{2} = \operatorname{ch} \frac{S}{a^2}; \quad \frac{y}{a} = \frac{e^{S/a^2} - e^{-S/a^2}}{2} = \operatorname{sh} \frac{S}{a^2}.$$

Рассмотрим теперь окружность $x^2 + y^2 = a^2$ (рис. 4 б). Величина $\frac{S}{a^2}$ (S — площадь удвоенного кругового полусектора OM_1K) дает угол $\angle KOP$, так что для окружности (из подобия треугольников $\triangle OD_1M_1$, $\triangle OPK$) можно записать:

$$\frac{|D_1C_1|}{a} = \sin \frac{S}{a^2}; \quad \frac{|OD_1|}{a} = \cos \frac{S}{a^2}; \quad \frac{|PK|}{a} = \operatorname{tg} \frac{S}{a^2}. \quad (2)$$

Из выражения (1) и (2) следует:

— для окружности $x = a \cos \psi$, $y = a \sin \psi$, где a — радиус окружности ($a = R_O$);

— для равносторонней гиперболы $x = a \operatorname{ch} \psi$, $y = a \operatorname{sh} \psi$, где $\psi = \frac{S}{a^2}$, где a — длина полуоси $|OP|$.

Аналогичные выкладки можно получить, рассматривая «связку» эллипса с неравносторонней гиперболой с полуосями a и b (рис. 5 при $a > b$, рис. 6 при $a < b$).

$|M_1C_1| = v_1$. Откуда $[R_\Psi] = u_1 + v_1$, $u_1 = x \cdot \cos \psi$, $v_1 = y \cdot \sin \psi$, или $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \psi$ или

$$\frac{v_1}{u_1} = \frac{y}{x} \cdot \frac{\sin \psi}{\cos \psi} \Rightarrow \operatorname{tg} \psi = \sqrt{\frac{v_1}{u_1}} \quad \text{и} \quad \psi = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{v_1}{u_1}}.$$

Как видим, комплексные числа *по версии АКЧ* имеют одинаковый вид, как на окружности, так и на эллипсе. Однако в данном случае центральный радиус R_Ψ для эллипса не есть постоянная величина, как для окружности, а есть функция от угла ψ . В полярных координатах эта функция имеет вид

$$R_\Psi = \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \psi + a^2 \sin^2 \psi}}. \quad (3)$$

Из (3) видно, что центральный радиус изменяется от полуоси a до b (и наоборот) по мере вращения радиус-вектора $\vec{R}_\Psi$ вокруг центра эллипса.

Следовательно, и параметры комплексного числа u_1 и v_1 $u_1 = R_\Psi \cdot \cos^2 \psi$ и $v_1 = R_\Psi \cdot \sin^2 \psi$ связаны с полуосями эллипса a и b .

Для изображения комплексных чисел на неравносторонней гиперболе также следует показать, что аргумент ψ как на эллипсе, так и на этой гиперболе имеет одинаковый вид. Используя те же обозначения, как и на рис. 1–2, можно записать для гиперболы

$$\text{пл.} PM_2O = \int_a^x \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2} \ln \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right), \quad \text{т.к.} \quad \text{пл.} \triangle OM_2D_2 = \frac{xy}{2};$$

$$S = \text{пл.} PM_2D_2 = \text{пл.} \triangle OM_2D_2 - \text{пл.} \triangle PM_2O = \frac{ab}{2} \ln \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right). \quad (4)$$

Решая уравнение (4) совместно с уравнением гиперболы, получим

$$\frac{x}{a} = \frac{e^{S/ab} + e^{-S/ab}}{2} = \operatorname{ch} \frac{S}{ab}; \quad \frac{y}{a} = \frac{e^{S/ab} - e^{-S/ab}}{2} = \operatorname{sh} \frac{S}{ab};$$

или

$$\frac{x}{a} = \operatorname{ch} \psi; \quad \frac{y}{b} = \operatorname{sh} \psi, \quad (5)$$

где $\psi = \frac{S}{ab}$.

У эллипса площадь сегмента OPM_1 вычисляется по формуле $S = \int_0^\psi y(x) dx$, где $y(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ (уравнение эллипса), т.е. $S = \int_0^\psi \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = ab\psi$, откуда получаем $\psi = \frac{S}{ab}$.

Таким образом, сохраняются отношения отрезков D_1M_1 и OD_1 к полуоси эллипса a , так же, как и отношения отрезков D_2M_2 и OD_2 к полуоси гиперболы:

$$\begin{aligned}\frac{|D_1M_1|}{a} &= \sin \frac{S}{ab} = \sin \psi, & \frac{|D_2M_2|}{a} &= \operatorname{sh} \frac{S}{ab} = \operatorname{sh} \psi, \\ \frac{|OD_1|}{a} &= \cos \frac{S}{ab} = \cos \psi, & \frac{|OD_2|}{a} &= \operatorname{ch} \frac{S}{ab} = \operatorname{ch} \psi.\end{aligned}$$

Точно так же, как и для равнобочной гиперболы, комплексное число $R = u_2 + v_2i$ (при тех же обозначениях) на гиперболах в общем виде (как при $a > b$, так и при $a < b$) имеют такие же параметры (рис. 6) $[R] = |OM_2|$, $u_2 = |OC_2|$, $v_2 = |C_2M_2|$, $|OD_2| = x$, $|D_2M_2| = y_2$, $[R] = u_2 + v_2$, $u_2 = x \operatorname{ch} \psi$, $v_2 = y \operatorname{sh} \psi$, $\psi = \operatorname{arcth} \sqrt{\frac{v_2}{u_2}}$.

В отличие от эллипса, характеризующегося центральным радиусом $R_\exists$, у гиперболы радиус отсутствует. Изобразив действительную гиперболу $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ в координатах $yi - x$, получим «комплексный» (мнимый) эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y)^2}{b^2} = 1$ с мнимым центральным радиусом, который, по-видимому, можно изобразить в виде $[R_\exists] = \frac{ab}{\sqrt{b^2 \operatorname{ch}^2 \psi - a^2 \operatorname{sh}^2 \psi}}$.

Как видим для эллипса и гиперболы как модуль $[R_\exists]$ комплексного числа, так и аргумент ψ связаны с параметрами этих фигур (a , b , R , эксцентриситетом $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$, фокальными радиусами и др.).

Обобщая изложенное выше, альтернативные комплексные числа, можно систематизировать следующим образом:

— на окружности (рис. 3) $R_O = u_1 + v_1i$, $[R_O] = u_1 + v_1$, $[R_O] = \operatorname{const}$, $\psi = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{v_1}{u_1}}$, $\psi = \frac{S}{a^2}$, $u_1 = [R_O] \cos^2 \psi$, $v_1 = [R_O] \sin^2 \psi$, где $u_1 = |OM_1|$, $v_1 = |M_1C_1|$,

— на равносторонней гиперболе (рис. 3) $R = u_2 + v_2i$, $[R] = u_2 + v_2$, $[R] \neq \operatorname{const}$, $\psi = \operatorname{arth} \sqrt{\frac{v_2}{u_2}}$, $\psi = \frac{S}{a^2}$, $u_2 = [R] \operatorname{ch}^2 \psi$, $v_2 = [R] \operatorname{sh}^2 \psi$, где $u_2 = |OC_2|$, $v_2 = |M_2C_2|$,

— на эллипсе (рис. 5–6) $R_\exists = u_1 + v_1i$, $[R_\exists] = u_1 + v_1$, $b \leq [R_\exists] \leq a$ (при $a > b$), $b \geq [R_\exists] \geq a$ (при $a < b$), $\psi = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{v_1}{u_1}}$, $\psi = \frac{S}{ab}$, $u_1 = [R_\exists] \cos^2 \psi$, $v_1 = [R_\exists] \sin^2 \psi$, где $u_1 = |OC_1|$, $v_1 = |M_1C_1|$,

— на неравносторонней гиперболе (рис. 5–6) $R = u_2 + v_2i$, $[R] = u_2 + v_2$,

$[R] \neq \text{const}$, $\psi = \text{arth} \sqrt{\frac{v_2}{u_2}}$, $\psi = \frac{S}{ab}$, $u_2 = [R] \text{ch}^2 \psi$, $v_2 = [R] \text{sh}^2 \psi$, где $u_2 = |OC_2|$, $v_2 = |M_2C_2|$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров В. Д.* Альтернативные комплексные числа (АКЧ). 1. Изображенные на плоскости. Свойства модулей // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 18-й международной Саратовской зимней школы. Саратов : Научная книга, 2016. С. 27–31.
2. *Выгодский М. Я.* Справочник по высшей математике. М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. 870 с.

УДК 517.935.2

БЫСТРЫЙ АЛГОРИТМ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В КОМБИНИРОВАННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Д. К. Андрейченко, К. П. Андрейченко, Д. В. Мельничук
(Саратов, Россия)

andreichenkodk@gmail.com, kp_andreichenko@renet.ru,
meldm007@gmail.com

Комбинированные динамические системы (КДС) представляют собой математические модели технических систем в форме систем связанных посредством условий связи и граничных условий обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. КДС с входной и выходной вектор-функциями $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N_x}$ и $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N_y}$, где t — время, рассмотрены в [1–4]. Основные теоремы о быстрых алгоритмах проверки устойчивости КДС сформулированы и доказаны в [1–3], а методы параметрического синтеза, т.е. выбора параметров обратных связей, обеспечивающих требуемое качество переходных процессов, рассмотрены в [2, 4]. После параметрического синтеза требуется выполнить прямое численное моделирование переходных процессов в нелинейных КДС, что является нетривиальной вычислительной задачей. Уравнения движения КДС можно привести к виду, аналогичному [2, 4]

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_t t), \quad \mathbf{h} = \int_S \mathbb{H}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}) dS, \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbb{F}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_t t), \quad \mathbf{r} \in \Omega, \quad \mathbb{G}(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu})|_S = 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{y}(0) = 0, \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = 0. \quad (3)$$