шины имеют ровно $\mu$ общих соседей. Сильно регулярный граф (SRG) с такими параметрами обозначается SRG $(V, k, \lambda, \mu)$.

Каждый ETF $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ в $\mathbb{R}^M$ порождает SRG с $V = N - 1$ вершинами и параметрами $k, \lambda$, зависящими от $M$ и $N$, а также $\mu = k/2$.

С другой стороны, каждый SRG $(V, k, \lambda, \mu)$ может быть преобразован в вещественный ETF.

Пусть $\mathbf{B}$ — $V \times V$ -матрица смежности данного графа, причем $\mu = k/2$. Полагаем $N = V + 1$ и определяем $N \times N$ матрицу смежности соотношением

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}^* \\ \mathbf{1} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

Далее, используя матрицу $\mathbf{A}$ и $\beta \in \mathbb{R}$, определяем матрицу $\mathbf{G}$ соотношением

$$\mathbf{G} = 2\beta\mathbf{A} + (\beta + 1)\mathbf{I} - \beta\mathbf{J}.$$

Матрица $\mathbf{G}$ симметричная, на главной диагонали единицы, внедиагональные элементы $\pm\beta$. Матрица $\mathbf{G}$ является матрицей Грама некоторого $M \times N$ ETF при надлежащем выборе параметров $M$ и $\beta$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Welch R.* Lower bounds on the maximum cross correlation of signals // IEEE Trans. Inform. Theory. 1974. Vol. 20, iss. 3. P. 397–399.

2. *Strohmer T., Heath R. W.* Grassmannian frames with applications to coding and communication// Appl. Comput. Harmon. Anal. 2003. Vol. 14, iss. 3. P. 257–275.

3. *Fickus M., Watson C. E.* Detailing the equivalence between real equiangular tight frames and certain strongly regular graphs. // Proc.SPIE. 2015. 959719/.

УДК 517.52

# ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ П. Л. УЛЬЯНОВА[1]

**К. А. Оганесян (Москва, Россия)**
oganchris@gmail.com

Рассматриваются ненулевые синус-ряды со стремящимися к нулю монотонными коэффициентами. Показано, что множество нулей на $[0, \pi]$ такого ряда не может иметь меру больше, чем $\pi/3$. Причем если это значение достигается, то почти все множество нулей лежит на отрезке $[2\pi/3, \pi]$.

Пусть

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad a_1 > 0, \quad a_n \searrow 0, \tag{1}$$

[1]Полный текст представлен в журнал "Математические заметки".

$$M = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}.$$

Обозначим для любого измеримого множества $L \in \mathbb{R}$ $E_L = M \cap L$, $\mu_L = \mu(E_L)$, где под $\mu(A)$ здесь и далее подразумевается классическая мера Лебега множества $A$.

Изучению свойств множества $M$ посвящено много работ по тригонометрическим рядам с монотонными коэффициентами. В частности, в некоторых из них рассматривался вопрос, «как велико» может быть множество $E_{[0,\pi]}$. Так, в 1979 г. П. Л. Ульянов поставил ряд задач, среди которых следующие:

1. Может ли это множество иметь мощность континуума?

2. Может ли это множество иметь положительную меру?

На первый вопрос В. Ф. Гапошкин [1] дал положительный ответ и в своей работе привел пример ряда вида (1), имеющего на $[0, \pi]$ континуум нулей, в котором $a_k = \sum_{s=m}^{\infty} s^{-1{,}001}$ при $10^{3(m-1)} \leqslant k < 10^{3m}$.

Позже М. И. Дьяченко [2] показал, что ряд вида (1) может сходиться к нулю на множестве положительной меры, построив функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x/a, & x \in (0, a], \\ 0, & x \in (a, \pi), \end{cases}$$

которая при $a \in (a_0, \pi)$ имеет ряд Фурье вида (1), а постоянная $a_0 \in \in (2\pi/3,\ 2{,}15)$, находится из уравнения $2a_0 - 4\sin a_0 + \sin 2a_0 = 0$. Также в этой работе было показано, что верна следующая оценка для меры нулей $f(x)$ на $[0, \pi]$

$$\mu_{[0,\pi]} < \pi - 1{,}4.$$

Затем А. С. Белов [3] и М. И. Дьяченко [4] независимо показали, что имеет место оценка

$$\mu_{[0,\pi]} \leqslant \pi/2,$$

а в работе [3] А. С. Беловым также был приведен пример функции $f(x)$ вида (1), равной нулю на отрезке $[2\pi/3, \pi]$

$$f(x) = \begin{cases} (2\pi x - 3x^2)/\sin(x/2), & x \in (0, 2\pi/3], \\ 0, & x \in (2\pi/3, \pi), \end{cases}$$

В настоящей работе показано, что значение $\mu_{[0,\pi]} = \pi/3$ максимально, и, более того, если $\mu_{[0,\pi]} = \pi/3$, то почти все множество нулей лежит на отрезке $[2\pi/3, \pi]$. А точнее, имеет место следующая

**Теорема 1.** *Для $\mu_{[0,\pi]}$ выполняется неравенство*

$$\mu_{[0,\pi]} \leqslant \pi/3.$$

*При этом если* $\mu_{[0,\pi]} = \pi/3 - 2\varepsilon$ *для некоторого* $\varepsilon \geqslant 0$, *то* $\mu_{[2\pi/3,\pi]} \geqslant$ $\geqslant \pi/3 - 7\varepsilon$ *(то есть* $\mu_{[2\pi/3,\pi]} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \pi/3$*).*

Стоит упомянуть, что в своей работе [5] М. И. Дьяченко построил для любого $\varepsilon \in (0,\pi)$ пример такого ненулевого косинус-ряда $g_\varepsilon(x)$ с монотонными коэффициентами, что $\{x \in (0,\pi) : g_\varepsilon(x) = 0\} \supset [\varepsilon, \pi]$.


СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гапошкин В. Ф.* О нулях тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами // Изв. вузов. Матем. 1981. Т. 172, вып. 9. С. 13–15.
2. *Дьяченко М. И.* О рядах Фурье с монотонно убывающими коэффициентами и некоторых вопросах гладкости сопряженных функций // Сообщ. АН ГрузССР. 1981. Т. 104, № 3. С. 533–536.
3. *Белов А. С.* Степенные ряды и кривые Пеано // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. Т. 49, № 4. С. 675–704.
4. *Дьяченко М. И.* О тригонометрических рядах с монотонными коэффициентами // Теория функций и приближений : тр. 2-й Сарат. зимн. шк. (24 января – 5 февраля 1984 г.) : в 2 ч. Ч. 2. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1986. С. 101–104.
5. *Dyachenko M. I.* On some properties of trigonometric series with monotone decreasing coefficients // Anal. Math. 1984. Vol. 10, № 3. P. 193–205.



УДК 517.929+517.983.51


## РАЗРЕШИМОСТЬ В КЛАССЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ[1]


**С. С. Орлов, В. В. Шеметова (Иркутск, Россия)**

orlov_sergey@inbox.ru, valentina501@mail.ru


Пусть $E$ — вещественное банахово пространство, $u$ — неизвестная, а $f$ — заданная функции со значениями в $E$ аргумента $t \geq 0$. Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение вида

$$u'(t) = Au(t) + Bu(t-h) + f(t),\ t > 0. \tag{1}$$

Здесь $A$ и $B$ — линейные непрерывные операторы из $E$ в $E$, $h > 0$. Для уравнения (1) поставим начальную задачу

$$u(t) = \varphi(t),\ -h \leq t \leq 0, \tag{2}$$

с начальной функцией $\varphi(t) \in \mathcal{C}([-h,\,0]\,;\,E)$.

**Определение 1.** *Классическим решением задачи* (1), (2) назовем функцию $u(t) \in \mathcal{C}([-h,\,+\infty);\,E) \cap \mathcal{C}^1((0,\,+\infty);\,E)$, которая обращает в тождество уравнение (1) и удовлетворяет начальным условиям (2).


[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-31-00291).