

на $[a, b]$ для всех n , то функции f_n для каждого n и функция f абсолютно интегрируемы по Колмогорову–Биркгофу (и, следовательно, M -интегрируемы) на отрезке $[a, b]$ и верно предельное соотношение теоремы 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Caponetti D., Marraffa V., Naralencov K. On the integration of Riemann-measurable vector-valued functions // *Monatsh. Math.* 2017. Vol. 182, № 3. P. 513–536.
2. Naralencov K. M. A Lusin type measurability property for vector-valued functions // *J. Math. Anal. Appl.* 2014. Vol. 417, № 1. P. 293–307.
3. Rodríguez J. Pointwise limits of Birkhoff integrable functions // *Proc. Amer. Math. Soc.* 2009. Vol. 137, № 1. P. 235–245.
4. Солодов А. П. О границах обобщения интеграла Колмогорова // *Матем. заметки.* 2005. Т. 77, № 2. С. 258–272

УДК 517.5

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СЕМЕЙСТВА КОМПЛЕКСНЫХ ТОРОВ НАД СФЕРОЙ РИМАНА С ТОЧКАМИ ВЕТВЛЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КРАТНОСТИ¹

С. Р. Насыров (Казань, Россия)

semen.nasyrov@yandex.ru

Мы изучаем гладкие однопараметрические семейства эллиптических функций $f(z, t)$, $0 \leq t \leq 1$, с периодами $\omega_1 = \omega_1(t)$ и $\omega_2 = \omega_2(t)$, которые имеют критические точки $a_j(t)$ порядка m_j , $0 \leq j \leq N$, и единственный полюс порядка n в начале координат. Естественно, предполагается, что $a_j(t) \not\equiv 0 \pmod{\omega}$, $0 \leq j \leq N$, $a_j(t) \not\equiv a_k(t) \pmod{\omega}$, $j \neq k$, где ω — решетка, порожденная векторами ω_1 и ω_2 , и

$$a_0(t) + a_1(t) + \dots + a_N(t) = 0. \quad (1)$$

Пусть $A_j(t) = f(a_j(t), t)$ — критические значения функции $f(z, t)$, соответствующие критическим точкам $a_j(t)$. Нашей целью является нахождение системы дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют $a_j(t)$ и периоды $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ в случае, когда зависимости $A_j(t)$ нам известны.

Эта задача имеет важную геометрическую интерпретацию. Предположим, что задано однопараметрическое семейство $S = S(t)$, $0 \leq t \leq 1$, комплексных торов, т. е. компактных римановых поверхностей рода нуль, разветвленно накрывающих сферу Римана. Тогда известны проекции точек ветвления $A_j(t)$ поверхности $S(t)$ на комплексную плоскость и соответствующие кратности ветвления m_j . Искомая система

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 17-01-00282 и 17-41-160345).

дифференциальных уравнений позволяет описывать семейство функций $f(z, t)$, униформизирующих семейство $S(t)$. Если, к примеру, нам известна функция $f(z, 0)$, то решая задачу Коши для полученной системы с начальными данными, соответствующими функции $f(z, 0)$, мы получаем значения параметров для функций $f(z, t)$ при всех $t \in [0; 1]$; по этим значениям можно восстановить и сами эти функции.

Заметим, что по заданным проекциям точек ветвления и их кратностям риманова поверхность определяется, вообще говоря, не единственным образом. На это впервые обратил внимание Гурвиц [1, 2]. Среди результатов по определению числа неэквивалентных накрытий с заданным типом ветвления упомянем результаты А. Д. Медных [3, 4], см. также [5–7]. Отметим также, что для компактных римановых поверхностей рода нуль задача, аналогичная рассматриваемой здесь, была решена нами в [8] для случая полиномов и в [9] для рациональных функций. Случай эллиптических функций с простыми точками ветвления над конечной частью плоскости и единственным полюсом был исследован в [10]. Здесь мы обобщаем результаты этой статьи на случай произвольных кратностей ветвления; при этом, как и в [10], считаем, что полюс у функций $f(z, t)$ один и располагается в начале координат.

Напомним определение эллиптических функций Вейерштрасса и введем необходимые обозначения.

Одной из основных эллиптических функций является \wp -функция Вейерштрасса

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum' \left[\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right].$$

Как принято в теории эллиптических функций, знак «штрих» у суммы (произведения) означает, что эта сумма (произведение) берется по всем ненулевым элементам ω решетки ω . В окрестности нуля \wp -функция имеет разложение

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20} z^2 + \frac{g_3}{28} z^4 + \dots,$$

где g_2 и g_3 — так называемые инварианты Вейерштрасса, определяемые равенствами

$$\frac{g_2}{60} = \sum' \frac{1}{\omega^4}, \quad \frac{g_3}{140} = \sum' \frac{1}{\omega^6}.$$

Дзета-функция Вейерштрасса

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum' \left[\frac{1}{z - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right]$$

обладает свойствами: $\zeta'(z) = -\wp(z)$,

$$\zeta(z + \omega_k) = \zeta(z) + \eta_k, \quad k = 1, 2,$$

где $\eta_k = 2\zeta(\omega_k/2)$. Обозначим $\tilde{\zeta}(z) = \zeta(z) - 1/z$. Эта функция имеет устранимую особенность в начале координат и разлагается в окрестности нуля в степенной ряд

$$\tilde{\zeta}(z) = -\frac{g_2}{60} z^3 - \frac{g_3}{140} z^5 + \dots$$

Наконец, сигма-функция Вейерштрасса

$$\sigma(z) = z \prod' \left\{ \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) \exp\left(\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}\right) \right\}$$

является нечетной целой функцией, обладающей свойствами:

$$\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \zeta(z), \quad \sigma(z + \omega) = \varepsilon \sigma(z) e^{\eta(z + \omega/2)},$$

где $\eta = m\eta_1 + n\eta_2$, если $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$, $\varepsilon = 1$, если $\omega/2 \in \omega$; в противном случае $\varepsilon = -1$. Обозначим $\tilde{\sigma}(z) = z/\sigma(z)$. Эта функция имеет устранимую особенность в начале координат и разлагается в окрестности нуля в ряд

$$\tilde{\sigma}(z) = 1 + \frac{g_2}{240} z^4 + \frac{g_3}{840} z^6 + \dots$$

Нам также будет необходим следующий результат из [10], дающий выражения частных производных функции $\ln \sigma(z) = \ln \sigma(z; \omega_1, \omega_2)$ по переменным ω_1, ω_2 .

Теорема 1. *Имеют место равенства*

$$\frac{\partial \ln \sigma(z)}{\partial \omega_1} = \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{2} \omega_2 (\mathfrak{P}(z) - (\zeta(z))^2) + \eta_2 (z\zeta(z) - 1) + \omega_2 \frac{g_2}{24} z^2 \right],$$

$$\frac{\partial \ln \sigma(z)}{\partial \omega_2} = -\frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{2} \omega_1 (\mathfrak{P}(z) - (\zeta(z))^2) + \eta_1 (z\zeta(z) - 1) - \omega_1 \frac{g_2}{24} z^2 \right].$$

Теперь вернемся к задаче об описании параметров униформизирующих функций по траекториям критических значений $A_j(t)$. Производная $f'(z, t)$ может быть записана в виде

$$f'(z, t) = c \frac{\prod_{j=0}^N \sigma^{m_j}(z - a_j)}{\sigma^{n+1}(z)}, \quad (2)$$

где $a_j = a_j(t)$, $c = c(t) \neq 0$ — некоторое комплексное число, $\sum_{j=0}^N m_j = n$.

Поскольку мы решаем задачу униформизации, дополнительным линейным преобразованием плоскости z можно добиться, чтобы $\omega_1(t) \equiv 1$, $0 \leq t \leq 1$, а сдвигом в плоскости образа — чтобы $A_0(t) = 0$, $0 \leq t \leq 1$. Это не ограничивает общности, и в дальнейшем мы будем считать эти условия выполненными.

Обозначим

$$G_k(z) = \frac{\sigma^{n+1}(z)}{\prod_{j=0, j \neq k}^n \sigma^{m_j}(z - a_j)}, \quad \tilde{G}_k(z) = G_k(z) (\tilde{\sigma}(z - a_k))^{m_k}.$$

Теорема 2. *Рассмотрим гладкое однопараметрическое семейство эллиптических функций вида (2) с периодами $\omega_1 = 1$ и $\omega_2 = \omega_2(t)$. Пусть $A_k = A_k(t)$ — критические значения функции $f(z, t)$, соответствующие критическим точкам $a_k = a_k(t)$, причем $A_0(t) = 0$, $0 \leq t \leq 1$. Тогда a_k , $1 \leq k \leq N$, ω_2 и параметр c удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:*

$$\dot{a}_k = \frac{1}{c} \left[\frac{\dot{A}_k}{m_k!} \left(\tilde{G}_k^{(m_k)}(a_k) - m_k \frac{\partial^{m_k-1}}{\partial \xi^{m_k-1}} \tilde{G}_k(\xi) [\zeta(\xi) - \tilde{\zeta}(\xi - a_k) - \eta_1 a_k] \Big|_{\xi=a_k} \right) - \sum_{j=1, j \neq k}^n \frac{\dot{A}_j}{(m_j - 1)!} \frac{\partial^{m_j-1}}{\partial \xi^{m_j-1}} \tilde{G}_j(\xi) [\zeta(\xi) - \zeta(\xi - a_k) - \eta_1 a_k] \Big|_{\xi=a_j} \right],$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{2\pi i}{c} \sum_{k=1}^n \dot{A}_k \frac{\tilde{G}_k^{(m_k-1)}(a_k)}{(m_k - 1)!},$$

$$\begin{aligned} \dot{c}/c = & - \sum_{j=0}^N m_j \left[\zeta(a_j) \dot{a}_j + \dot{\omega}_2 \frac{\partial \ln \sigma(a_j)}{\partial \omega_2} \right] + \\ & + n \sum_{k=1}^n \frac{\dot{A}_k}{(m_k - 1)!} \frac{\partial^{m_k-1}}{\partial \xi^{m_k-1}} \tilde{G}_k(\xi) [\mathfrak{P}(\xi) + \eta_1] \Big|_{\xi=a_k}, \end{aligned}$$

где производная $\partial \ln \sigma / \partial \omega_2$ может быть найдена с помощью второго равенства из теоремы 1.

Здесь точка сверху буквы означает операцию дифференцирования по параметру t . Отметим также, что после нахождения a_k , $1 \leq k \leq N$, параметр a_0 легко находится с учетом равенства (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hurwitz A. Über Riemannsche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten // Math. Ann. 1891. Vol. 39. P. 1–61.

2. *Hurwitz A.* Über die Anzahl der Riemannsche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten // *Math. Ann.* 1902. Vol. 55. P. 53–66.
3. *Медных А. Д.* Неэквивалентные накрытия римановых поверхностей с заданным типом ветвления // *Сиб. матем. журн.* 1984. Т. 25, № 4. С. 120–142.
4. *Медных А. Д.* Новый метод подсчета числа накрытий над многообразием с конечно порожденной фундаментальной группой // *Докл. РАН.* 2006. Т. 409, № 2. С. 158–162.
5. *Ландо С. К.* Разветвленные накрытия двумерной сферы и теория пересечений в пространствах мероморфных функций на алгебраических кривых // *УМН.* 2002. Т. 57, вып. 3(345). С. 29–98.
6. *Ландо С. К., Звонкин А. К.* Графы на поверхностях и их приложения. М. : МЦНМО, 2010. 480 с.
7. *Насыров С. Р.* Геометрические проблемы теории разветвленных накрытий римановых поверхностей. Казань : Магариф, 2008. 276 с.
8. *Насыров С. Р.* Нахождение полинома, униформизирующего заданную компактную риманову поверхность // *Матем. заметки.* 2012. Т. 91, вып. 4. С. 597–607.
9. *Насыров С. Р.* Униформизация односвязных разветвленных накрытий сферы рациональными функциями // *Докл. АН.* 2017. Т. 476, № 1. С. 14–16.
10. *Насыров С. Р.* Униформизация однопараметрических семейств комплексных торов // *Изв. вузов. Математика.* 2017. № 8, С. 42–52.

УДК 517.51

ИСПРАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ТИПА ЛАГРАНЖА – СТИЛТЬЕСА

В. В. Новиков (Саратов, Россия)

vvnovikov@yandex.ru

Пусть P_n — ортогональный многочлен Лежандра степени n и E_{n+1} — многочлен Стилтъеса степени $n + 1$, определенный с точностью до постоянного множителя условием

$$\int_{-1}^1 E_{n+1}(x)P_n(x)x^k dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad n \geq 1.$$

Известно (см., например, [1]), что нули $\{\xi_{i,n+1}\}_{i=1}^{n+1}$ многочлена E_{n+1} являются простыми, действительными и лежат в $(-1, 1)$. В [2] установлено, что константы Лебега интерполяционного процесса Лагранжа с узлами $\{\xi_{i,n+1}\}$ имеют оптимальный логарифмический порядок роста подобно интерполяционным константам Лебега для узлов Чебышева. Там же показано, что распределение нулей многочленов $\{E_{n+1}\}$ подчиняется закону арккосинуса. Кроме того, было обнаружено [3], что узлы $\{\xi_{i,n+1}\}$ играют важную роль в теории квадратурных формул (формула Гаусса – Кронрода). Указанные факты обусловили интерес ряда авторов (см.