Теорема 1. *Системы D_S и W_S одновременно являются или нет базисами Рисса.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Митягин Б. С.* Системы сжатых функций: полнота, минимальность, базисность // Функц. анализ и его прил. 2017. Т. 51, № 3. С. 94–97.
2. *Granados B.* Walsh wavelets // Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. 1992. Vol. 13. P. 225–236.
3. *Терехин П. А.* Аффинные системы функций типа Уолша. Ортогонализация и пополнение // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4, ч. 1. С. 395–400.
4. *Аль-Джоурани Х. Х. Х., Миронов В. А., Терехин П. А.* Аффинные системы функций типа Уолша. Полнота и минимальность // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 247–256. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-247-256.
5. *Асташкин С. В., Терехин П. А.* Базисные свойства аффинной системы Уолша в симметричных пространствах // Изв. РАН. Сер. матем. (принято к печати).

УДК 517.9

ОБ ИНТЕРВАЛЕ ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ ОДНОГО СЛАБОГО ЧЕБЫШЕВСКОГО ЖАДНОГО АЛГОРИТМА[1]

С. В. Миронов, С. П. Сидоров (Саратов, Россия)

sergei.v.mironov@gmail.com

Пусть X есть Банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Пусть выпуклая функция E определена на X. Задача выпуклой оптимизации состоит в нахождении приближенного решения следующей задачи

$$E(x) \to \min_{x \in X}. \tag{1}$$

Во многих реальных приложениях необходимо, чтобы оптимальное решение x^* задачи (1) имело простую структуру, например, представляло собой линейную комбинацию конечного числа элементов заданного множества (словаря D в X). Другими словами, x^* должен быть разреженным по отношению к словарю D в X.

Множество элементов $\mathcal{D}$ пространства X называется *словарем* (см., например, [1]), если каждый элемент $g \in \mathcal{D}$ ограничен по норме единицей, $\|g\| \le 1$, и замыкание линейной оболочки $\mathcal{D}$ совпадает с X, т.е. $\overline{\operatorname{span} \mathcal{D}} = X$. Словарь $\mathcal{D}$ называется симметричным, если $-g \in \mathcal{D}$ для всякого $g \in \mathcal{D}$. Далее мы предполагаем, что словарь $\mathcal{D}$ является симметричным.

Нас интересует задача нахождения решений задачи (1), которые являются разреженными по отношению к словарю $\mathcal{D}$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00507).

Одним из классов конструктивных методов для нахождения наилучших m-членных приближений является класс жадных алгоритмов. Жадные алгоритмы в силу своей конструкции способны находить разреженные решения по отношению к словарю $\mathcal{D}$. Возможно, метод Франка – Вульфа [6], который также известен как метод условного градиента [7], является одним из самых известных алгоритмов для нахождения оптимальных решений условных задач выпуклой оптимизации. В. Ф. Демьянов и А. М. Рубинов обобщили его на случай произвольных Банаховых пространств [8]. В статье [9] приводятся прямые и двойственные результаты по сходимости алгоритмов типа Франка – Вульфа на основе применения идей двойственности, представленных в работе [10]. В последнее время были получены новые результаты по сходимости жадных алгоритмов [1–5].

В данной статье мы изучаем слабый чебышевский жадный алгоритм (weak Chebyshev greedy algorithm, WCGA) для нахождения решений задачи выпуклой оптимизации, которые являются разреженными по отношению к некоторому словарю, в банаховых пространствах.

Прямой результат о сходимости алгоритма WCGA был получен в [1]. Развивая идеи [9] и [10], мы вводим понятие интервала двойственности для получения двойственных оценок сходимости алгоритма WCGA при нахождении разреженных решений задач выпуклой оптимизации.

Для функционала $F \in X^*$ и элемента $f \in X$ мы будем использовать следующее обозначение $F(f) = \langle F, f \rangle$. Пусть $\Omega := \{x \in X : \ E(x) \leq E(0)\}$ и предположим, что Ω ограничено. Будем предполагать, что функция E дифференцируема по Фреше на Ω. Обозначим $\langle E'(x), y \rangle$ значение функционала $E'(x)$ (производной по Фреше функции E в точке x) в точке y.

Мы предполагаем, что существует элемент x^* (не обязательно единственный) Банахова пространства X, в котором достигается минимум $E^* := E(x^*)$. Очевидно, что множество всех элементов, в которых достигается минимум, является выпуклым. Отметим, что минимум E^* будет достигаться на элементе (или множестве элементов), принадлежащих множеству Ω. Пусть $A_1(\mathcal{D})$ означает замыкание (в X) выпуклой оболочки словаря $\mathcal{D}$.

Пусть $\tau := \{t_m\}_{m=1}^{\infty}$ будет последовательностью неотрицательных чисел $t_m \leq 1$, $m = 1, 2, \ldots$, которая называется ослабляющей. Алгоритм WCGA(co) использует ослабляющую последовательность τ на шаге выбора направления наискорейшего спуска жадного алгоритма для нахождения приближенного решения ϕ_m этой подзадачи. Именно поэтому алгоритм называется «слабым».

Algorithm 2: Слабый чебышевский жадный алгоритм (WCGA(co))

begin

$\cdot$ Положить $G_0 = 0$;

for each $m \geq 1$ **do**

$\cdot$ *(Выбор направления спуска)* Найти $\phi_m \in \mathcal{D}$ такой,что $\langle -E'(G_{m-1}), \phi_m \rangle \geq t_m \sup_{s\in\mathcal{D}} \langle -E'(G_{m-1}), s \rangle$;

$\cdot$ *(Чебышевский поиск)* Найти числа ω_i^* такие, что $E\left(\sum_{i=1}^{m} \omega_i^* \phi_i\right) = \inf_{\omega_i} E\left(\sum_{i=1}^{m} \omega_i \phi_i\right)$;

$\cdot$ *(Переход в новое состояние)* Определить $G_m = \sum_{i=1}^{m} \omega_i^* \phi_i$;

end

Обозначим $E^* := \inf_{x\in X} E(x) = \inf_{x\in\Omega} E(x)$, $\mathcal{L}_M := \{s \in X \ : \ s/M \in \in A_1(\mathcal{D})$, $A_\epsilon := A(E,\epsilon) = \inf\{M : \ \exists y \in \mathcal{L}_M$ такой, что $E(y) - E^* \leq \epsilon\}$, $\epsilon_m := \inf\{\epsilon : \ A_\epsilon^q m^{1-q} \leq \epsilon\}$.

Определим *интервал двойственности* для состояния $G \in \Omega$ и ошибки ϵ следующим образом:

$$g(G) = g(G,\epsilon) =: A_\epsilon \sup_{s\in\mathcal{D}} \langle E'(G), A_\epsilon^{-1} G - s \rangle. \tag{2}$$

Пусть E есть выпуклая функция, определенная на Банаховом пространстве X. Тогда для любого $x \in \Omega$ будет $E(x) - E(x^*) \leq g(x,\epsilon) + \epsilon$. Таким образом, практическая применимость интервала двойственности связана с тем фактом, что интервал двойственности $g(x)$ является оценкой ошибки приближения оптимального состояния $E(x^*)$ текущим состоянием $E(x)$.

Справедлив следующий двойственный результат для WCGA.

Теорема. *Пусть E есть равномерно гладкая выпуклая функция, определенная на Банаховом пространстве X. Пусть $\rho(E,u)$ есть модуль гладкости функции E и предположим, что $\rho(E,u) \leq \gamma u^q$, $1 < q \leq \leq 2$. Пусть $\tau = \{t_m\}_{m=1}^\infty$, $0 < \theta < t_k < 1$, $k = 1, 2, \ldots$, есть ослабляющая последовательность. Предположим, что CGA или WCGA выполнены для $N > 2$ итераций. Тогда найдется такая итерация $1 \leq \tilde{m} \leq N$, что*

$$g(G_{\tilde{m}}) \leq \beta C(E,q,\gamma)\epsilon_N, \tag{3}$$

где $\beta > 0$ не зависит от N.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Temlyakov V. N.* Greedy approximation in convex optimization // Constr. Approx. 2015. Vol. 41, № 2. P. 269-–296.

2. *Temlyakov V. N.* Dictionary descent in optimization // Analysis Math. 2016. Vol. 42, № 1. P. 69-–89.

3. *DeVore R. A., Temlyakov V. N.* Convex optimization on Banach spaces // Found. Comput. Math. 2016. Vol. 16, № 2. P. 369-–394.

4. *Nguyen H., Petrova G.* Greedy Strategies for Convex Optimization // Calcolo. 2017. Vol. 54, № 1. P. 207–224.

5. *Freund R. M., Grigas P.* New analysis and results for the Frank-Wolfe method // Math. Program. 2016. Vol. 155, № 1—2. P. 199–230.

6. *Frank M., Wolfe Ph.* An algorithm for quadratic programming // Naval Research Logistics Quarterly. 1956. Vol. 3, № 1-–2. P. 95–110.

7. *Левитин Е. С., Поляк Б. Т.* Методы минимизации при наличии ограничений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1966. Т. 6, вып. 5. С. 787-–823.

8. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Приближенные методы решения экстремалыных задач. Л. : Ленингр. ун-т, 1968. 180 с.

9. *Jaggi M.* Revisiting Frank -– Wolfe : Projection-free sparse convex optimization // ICML'13 : Proc. 30th Intern. Conf. on Machine Learning. Atlanta, GA, USA, 2013. P. 427–435.

10. *Clarkson K. L.* Coresets, sparse greedy approximation, and the Frank–Wolfe algorithm // ACM Transactions on Algorithms. 2010. Vol. 6, № 4. P. 1–30.

УДК 517.5

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА БЕРНШТЕЙНА – ЗИГМУНДА – АРЕСТОВА[1]

В. Р. Мисюк (Гродно, Беларусь)
misiuk@grsu.by

Введём в рассмотрение тригонометрический полином

$$T_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos kt + b_k \sin kt\right) ,$$

который определён на действительной оси и имеет порядок не выше чем n. Свойства тригонометрических полиномов изучены достаточно тщательно в различных аспектах анализа. Замечательным свойством этих полиномов является, то что его норма в основных классических пространствах C и L_p не зависит от сдвига аргумента. Это даёт основание получать точные неравенства с помощью довольно простых, но тем не менее изящных методов, причём многие задачи анализа на классах преодических функций базируются на этих неравенствах. При этом, особую роль играют неравенства дающие соотношения между нормой производной полинома через норму (вообще может и в другом пространстве) самого полинома. Рассмотрим одно из таких соотношений.

[1]Работа выполнена при финансовой ГПНИ «Конвергенция–2020».