УДК 517.521.2

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА СУММ ФУРЬЕ ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ЛОМАНЫХ

Г. Г. Акниев (Махачкала, Россия)
hasan.akniyev@gmail.com

Пусть $m \geq 2$ — некоторое натуральное число. Обозначим через $\{x_i\}_{i=0}^{m}$ систему узлов на $[0, \pi]$, таких что $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < x_m = \pi$, и обозначим $\Delta_i = [x_i, x_{i+1}]$. Также выберем m вещественных чисел $y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}, y_m = y_0$. Через $l(x)$ обозначим непрерывную функцию, которая на каждом отрезке Δ_i представляется в виде $l(x) = l_i(x) = \alpha_i \cos x + \beta_i$, причем $l(x_i) = y_i$, $(0 \leq i \leq m)$. Мы будем называть такие функции $l(x)$ тригонометрическими ломаными. Пусть $f_r(x) = \varphi_r(\cos x)$, где $\varphi_r(t)$ — некоторая r-раз дифференцируемую функцию на $[-1, 1]$. Рассмотрим частный случай $l(x)$, когда $x_i = \frac{\pi i}{m}$ и $y_i = f_r(x_i)$ $(0 \leq i \leq m)$, другими словами, когда тригонометрическая ломаная $l(x)$ «вписана» в функцию $f_r(x)$. Мы будем обозначать такую функцию $l_{f_r}(x)$. Целью данной работы является оценка величин $|R_n(l, x)| = |l(x) - S_n(l, x)|$ когда $n \to \infty$ и $|f_r(x) - S_n(l_{f_r}, x)|$, когда $n, m \to \infty$, где $S_n(f, x)$ — это частичная сумма ряда Фурье порядка n функции f. Нами были получены следующие результаты.

Теорема 1. *Если $l(x)$ — тригонометрическая ломаная и $S_n(l, x)$ — частичная сумма ряда Фурье данной ломаной, тогда мы можем оценить $|l(x) - S_n(l, x)|$ следующим образом:*

$$|l(x) - S_n(l, x)| \leq \frac{c(l)}{n}, \quad x \in [0, \pi],$$

$$|l(x) - S_n(l, x)| \leq \frac{c(l, \varepsilon)}{n^2}, \quad |x - x_i| \geq \varepsilon.$$

Теорема 2. *Для тригонометрической ломаной $l_{f_r}(x)$, совпадающей с функцией $f_r(x)$ в точках $x_i = \frac{\pi i}{m}$ справедлива следующая оценка:*

$$|l(x) - S_n(l, x)| \leq \frac{1}{\pi n} \int_{-1}^{1} \left|\varphi''(t)\right| dt, \quad m \geq 2,\ x \in [0, \pi].$$

Теорема 3. *Если $l_{f_r}(x)$ — это тригонометрическая ломаная, вписанная в функцию $f_r(x)$ и $S_n(l_{f_r}, x)$ — ее сумма Фурье порядка n, тогда при $r \geq 1$ справедлива оценка*

$$|f(x) - S_n(l_{f_r}, x)| \leq c(\varphi) \ln n \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^{r+1}} \right), \quad n, m \to \infty,$$

в частности

$$|f(x) - S_n(l_{f_r}, x)| \le \frac{c(\varphi)\ln n}{n^{r+1}}, \quad m = n^{\frac{r+1}{2}}, \quad n \to \infty.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. М. : ФИЗМАТЛИТ, 1968. Т. 3. 662 с.

УДК 517.9

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ПО ЗАДАННЫМ С ПОГРЕШНОСТЬЮ ГРАНИЧНЫМ ЗНАЧЕНИЯМ[1]

Р. Р. Акопян (Екатеринбург, Озерск, Россия)
RRAkopyan@mephi.ru

Пусть G односвязная область комплексной плоскости с границей Γ – замкнутой спрямляемой жордановой кривой; γ_1 – произвольное измеримое подмножество Γ положительной меры, и γ_0 — дополнение γ_1 до Γ, т.е., $\gamma_0 := \Gamma \setminus \gamma_1$. Обозначим через $H(G) = H^\infty(G)$ пространство Харди аналитических и ограниченных функций в G. Рассмотрим класс Q функций f из $H(G)$ таких, что справедливо неравенство $\|f\|_{L^\infty(\gamma_0)} \le 1$.

Производная функции Грина области G по внешней нормали к кривой Γ называется плотностью гармонической меры относительно G и точки z, которую обозначим $P(z,\zeta)$. Соответственно, гармоническая мера $w(z,\gamma,G)$ измеримого подмножества γ границы Γ относительно области G и точки z выражается формулой $w(z,\gamma,G) = \int\limits_\gamma P(z,\zeta)\,|d\zeta|$.

Рассматривается следующая задача оптимального восстановления. Пусть для неизвестной функции f из класса Q на γ_1 задана функция $q \in L^\infty(\gamma_1)$ такая, что $\|f - q\|_{L^\infty(\gamma_1)} \le \delta$. Мы хотим восстановить значение производной $f'(z_0)$, $z_0 \in G$, по q наилучшим (оптимальным) методом. В качестве множества $\mathcal{R}$ методов восстановления, из которых выбирается оптимальный, рассматриваются множество $\mathcal{O}$ всех функционалов на $L^\infty(\gamma_1)$, или $\mathcal{B}$ ограниченных функционалов, или $\mathcal{L}$ линейных функционалов. Точная постановка задачи следующая. Для числа $\delta \ge 0$ и метода восстановления $T \in \mathcal{R}$, величина

$$\mathcal{U}(T,\delta) := \sup\left\{|f'(z_0) - Tq| \colon f \in Q,\, q \in L^\infty(\gamma_1),\, \|f - q\|_{L^\infty(\gamma_1)} \le \delta\right\}$$

[1]Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление №211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт №02.A03.21.0006 от 27.08.2013).