Рассмотрим теперь задачу построения графа по заданной функции. Аналогичная задача для групп Виленкина изложена в работе [3]. Пусть функция $\varphi(x)$ - масштабирующая функция из класса $\mathfrak{D}_M(F_{-N}^{(s)})$. По преобразованию Фурье $\hat{\varphi}(\chi)$ функции $\varphi(x)$ построим граф по алгоритму 2.

Алгоритм 2.

Шаг 1. Рассмотрим ненулевые значения функции $\hat{\varphi}$.

$\hat{\varphi}(F_{-N}^{(s)\perp}\mathbf{r}_{-N}^{\mathbf{a}_{-N}}\mathbf{r}_{-N+1}^{\mathbf{a}_{-N+1}}\dots\mathbf{r}_0^{\mathbf{a}_0}\dots\mathbf{r}_{M-1}^{\alpha_{M-1}}) = m^{(\mathbf{0})}(F_{-N}^{(s)\perp}\mathbf{r}_{-N}^{\mathbf{a}_{-N}}\mathbf{r}_{-N+1}^{\mathbf{a}_{-N+1}}\dots\mathbf{r}_{-1}^{\mathbf{a}_{-1}}\mathbf{r}_0^{\mathbf{a}_0}) \cdot m^{(\mathbf{0})}(F_{-N}^{(s)\perp}\mathbf{r}_{-N}^{\mathbf{a}_{-N+1}}\mathbf{r}_{-N+1}^{\mathbf{a}_{-N+2}}\dots\mathbf{r}_{-1}^{\mathbf{a}_0}\mathbf{r}_0^{\mathbf{a}_1})\dots m^{(\mathbf{0})}(F_{-N}^{(s)\perp}\mathbf{r}_{-N}^{\mathbf{a}_{M-1}}) \cdot m^{(\mathbf{0})}(F_{-N}^{(s)\perp})$.

Шаг 2. Так как мы выбрали ненулевое значение $\hat{\varphi}$, то каждый сомножитель отличен от нуля. Для каждого такого $m^{(\mathbf{0})}(F_{-N}^{(s)\perp}\mathbf{r}_{-N}^{\mathbf{a}_j}\mathbf{r}_{-N+1}^{\mathbf{a}_{j+1}}\dots\mathbf{r}_{-1}^{\mathbf{a}_{j+N-1}}\mathbf{r}_0^{\mathbf{a}_{j+N}})$ строим в нашем графе ребро $(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1}, \dots, \mathbf{a}_{j+N-1})$ - $(\mathbf{a}_{j+1}, \mathbf{a}_{j+2}, \dots, \mathbf{a}_{j+N})$

Теорема 4. *Множество графов, построенных по алгоритму 1, совпадает с множеством графов, построенных по алгоритму 2.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lukomskii S., Vodolazov A.* Non-Haar MRA on local fields of positive characteristic // J. Math. Anal. Appl. 2016. Vol. 433, iss. 2. P. 1415—1440.

2. *Berdnikov G., Kruss Iu., Lukomskii S.* On orthogonal systems of shifts of scaling function on local fields of positive characteristic // Turk. J. Math. 2017. Vol. 41, № 2. P. 244–253.

3. *Бердников Г. С.* Связь между необходимым и достаточным условиями масштабирующей функции на группах Виленкина // Материалы международной конференции по алгебре, анализу и геометрии. Казань : Изд-во Академии наук РТ, 2016. С. 111–112.

УДК 517.53/.55

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ПОЛНОТЫ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ В НЕКОТОРОМ КЛАССЕ ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЕЙ

А. Ф. Кужаев (Уфа, Россия)

arsenkuz@outlook.com

Будем говорить, что некоторая система функций $\{\varphi_n(z)\}$ полна в области $D \subseteq \mathbb{C}$, если он полна в пространстве функций, аналитических в области D с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах из D. В 1955 г. А. Ф. Леонтьевым была опубликована работа [1], в которой были сформулированы достаточные условия полноты системы $\{z^l e^{\lambda_k z}\}_{k=1,l=0}^{\infty,n_k-1}$ в криволинейной полосе т. е. в области вида

$$\{x + iy \in \mathbb{C} \mid f(x) < y < f(x) + 2\pi a\},$$

$a > 0$, $f(x)$ — непрерывная на всей вещественной оси функция. Здесь λ_k — положительные числа, образующие строго возрастающую неограниченную последовательность, а n_k — натуральные числа (их будем называть кратностями точек λ_k). Достаточные условия были сформулированны в терминах условий на кратную последовательность $\{\lambda_k, n_k\}$ и число a. Независимо от Леонтьева аналогичные условия были так же получены Б. Я. Левиным (см., например, [2, с. 286]). Обобщению данного результата Леонтьева – Левина посвящена работа [3]. Основываясь на этой работе, можно получить необходимые условия для полноты указанной выше системы экспонент в выпуклых областях, удовлетворяющим определённым условиям.

Обозначим $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\mathcal{E}(\Lambda) = \{z^l e^{\lambda_k z}\}_{k=1,l=0}^{\infty,n_k-1}$. Величины

$$\bar{n}(\Lambda) := \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \sum_{\lambda_k \leqslant t} n_k, \quad \bar{n}_0(\Lambda) := \lim_{\delta\to 0+} \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{\delta t} \sum_{t(1-\delta)<\lambda_k\leqslant t} n_k.$$

называются верхней и максимальной плотностью последовательности Λ соответственно. Согласно [4, § E3, гл. IV] предел по $\delta \to 0+$ всегда существует, так что максимальная плотность определена корректно.

Пусть $D \subseteq \mathbb{C}$ — произвольная выпуклая область. Вертикальным диаметром области D назовём величину:

$$d(D) := \sup_{x} \sup_{z_1,z_2\in D} \Big\{ |y_1 - y_2| : z_1 = x + iy_1, z_2 = x + iy_2, \quad z_1, z_2 \in D, \ x \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Иными словами, вертикальный диаметр области D — есть точная верхняя грань длин всех вертикальных отрезков, содержащихся в этой области.

Через $K_D(\varphi)$ обозначим опорную функцию выпуклой области D:

$$K_D(\varphi) = \sup_{z\in D} \operatorname{Re}(ze^{-i\varphi}), \quad \varphi \in [-\pi; \pi].$$

Если область D ограничена, то её опорная функций ограничена и непрерывна. В общем же случае она является полунепрерывной снизу.

Непосредственно из определений $d(D)$ и $K_D(\varphi)$ следует, что всегда

$$d(D) \leqslant K_D\left(-\frac{\pi}{2}\right) + K_D\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Если же имеет место знак равенства, то область D будем называть вертикально сбалансированной. Понятие вертикальной сбалансированности фактически представляет интерес лишь для областей, ограниченных в направлениях $\varphi = \pm\pi/2$. Примерами таких областей являются горизонтальная полоса, круг и др. Если же область не является ограниченной в указанных направлениях, то её автоматически полагаем вертикально сбалансированной.

Имеет место следующая

Теорема. *Пусть* $\bar{n}_0(\Lambda) = \tau < \infty$. *Если система* $\mathcal{E}(\Lambda)$ *не полна в любой выпуклой области* D *с вертикальным диаметром* $d(D) > 2\pi\tau$, *и полна в любой вертикально сбалансированной выпуклой области* D *с вертикальным диаметром* $d(D) \leqslant 2\pi\tau$, *то необходимо выполнения равенства* $\bar{n}(\Lambda) = \tau$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леонтьев А. Ф.* О полноте системы показательных функций в криволинейной полосе // Матем. сб. 1955. Т. 36, вып. 3. С. 555–568.
2. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М. : ГИТТЛ, 1956. 632 с.
3. *Кривошеев А. С., Кужаев А. Ф.* Об одной теореме Леонтьева–Левина // Уфимск. матем. жур. 2017. Т. 9, вып. 3. С. 89–101.
4. *Koosis P.* The logarithmic integral I. N.Y. : Cambridge Univ. Press, 1997. 625 p.

УДК 517.54

ДВУСТОРОННЯЯ ОЦЕНКА ОБЛАСТЕЙ ОДНОЛИСТНОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ГОЛОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ В СЕБЯ [1]

О. С. Кудрявцева (Волгоград, Россия)

Kudryavceva_OS@mail.ru

Пусть $\mathcal{H}$ — класс голоморфных функций, отображающих правую полуплоскость $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z > 0\}$ в себя. Как известно (см. [1]), для каждой $f \in \mathcal{H}$ существует неотрицательный угловой предел $\angle \lim\limits_{z\to\infty} f'(z) = f'(\infty)$, называемый угловой производной функции f на бесконечности. В том случае, когда эта производная положительна, функция f однолистна в некотором секторе.

Теорема А. (Валирон, [1]) *Пусть* $f \in \mathcal{H}$, *причём* $f'(\infty) > 0$. *Для любого* $k > 0$ *найдётся* $R > 0$ *такое, что* f *однолистна в секторе* $\{z \in \mathbb{H}\colon\ |\operatorname{Im} z| < k\operatorname{Re} z,\ |z| > R\}$.

Заметим, что значение R зависит не только от величины угла сектора, но и от функции f. Разумеется, выбрать единое значение R на всем классе H не представляется возможным, сколь бы малое k мы не брали.

Целью данной работы является выделение областей однолистности на подклассах класса $\mathcal{H}$, состоящих из функций, удовлетворяющих дополнительным условиям.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-31-00042 мол_а).