Теорема 1. *Минимальный порядок m интерполяционной н.д. не превосходит r.*

Приведем пример. Пусть $T_2 := \{(-1,-1);(1,1)\}$. Легко видеть, что $r = 1$ и система $\mathcal{S}$ имеет два линейно независимых решения $\mathbf{q} = (0,1,0)$ и $\mathbf{q} = (1,0,1)$ (их можно домножать на константы и складывать), т.е. $Q(z) = z$ и $Q(z) = z^2 + 1$, соответственно. При этом $m = r = 1$.

Интересно рассмотреть связь разрешимости системы $\mathcal{S}$ и степени многочлена Лагранжа P_l степени $l \leq n-1$, интерполирующего таблицу T_n. Можно показать, что при этом

$$r = n - l.$$

Отсюда и из теоремы 1 получается

Теорема 2. *Минимальный порядок m интерполяционной н.д. не превосходит $n - l$.*

Рассмотрим таблицу T_2 из предыдущего примера. Она интерполируется многочленом $P_1(x) = x$, и потому, согласно теореме 2, $m \leq 1$. Это вполне согласуется с тем, что $m = 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Данченко В. И., Кондакова Е. Н.* Критерий возникновения особых узлов при интерполяции наипростейшими дробями // Тр. МИАН. 2012. Т. 278. С. 49–58.

УДК 517.984

ОБ ОБОБЩЕННОМ ФОРМАЛЬНОМ РЕШЕНИИ ПО МЕТОДУ ФУРЬЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В. В. Корнев, А. П. Хромов (Саратов, Россия)
kornevvv@info.sgu.ru, khromovap@info.sgu.ru

1. Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t) + f(x,t),\ x \in [0,1],\ t \in [0,T], \quad (1)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = \psi(x), \quad (2)$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad (3)$$

где $q(x) \in L[0,1]$, $\varphi(x) \in L[0,1]$, $\psi(x) \in L[0,1]$, $f(x,t) \in L(Q_T)$, $Q_T = [0,1] \times [0,T]$.

В [1] на основе резольвентного подхода была изучена сходимость формального решения метода Фурье для задачи (1)–(3) в случае $q(x) \in L[0,1]$, $\psi(x) \equiv 0$ и $f(x,t) \in L_2(Q_T)$. Теперь мы изучаем случай

$f(x,t) \in L(Q_T)$ и $\psi(x) \in L[0,1]$. Формальное решение по методу Фурье берем в виде:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\left[(R_\lambda\varphi)\cos\rho t + (R_\lambda\psi)\frac{\sin\rho t}{\rho} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^t (R_\lambda f)\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\right] d\lambda, \tag{4}$$

где $R_\lambda = (L-\lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора $Ly = -y''(x) + q(x)y(x)$, $y(0) = y(1) = 0$, λ — спектральый параметр, E — единичный оператор, $R_\lambda f$ означает, что R_λ применяется к $f(x,\tau)$ по переменной x,$\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Re}\rho \geq 0$, γ_n — образ окружности $\tilde{\gamma}_n = \{\rho|\ |\rho - n\pi| = \delta\}$ в λ-плоскости, $\delta > 0$ и достаточно мало, r и n_0 выбраны так, чтобы при $n \geq n_0$ внутри γ_n находится только одно собственное значение оператора L. При любых $x,t \in Q_T$ формальный ряд (4) предста́вим в виде:

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t), \tag{5}$$

где $u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum\limits_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda^0\varphi)\cos\rho t\,d\lambda$.

Ряд $u_0(x,t)$ есть $\frac{1}{2}(\Sigma_+ + \Sigma_-)$, где $\Sigma_\pm$ — тригонометрический ряд Фурье функции $\tilde{\varphi}(x)$ в точке $x \pm t$ ($\tilde{\varphi}(x)$ есть нечетное 2-периодическое продолжение $\varphi(x)$ на всю ось), R_λ^0 — резольвента оператора L_0, который есть оператор L при $q(x) = 0$.

Лемма. *Ряд $u_1(x,t)$ сходится при любых $x,t \in Q_T$ и его сумма непрерывна по x и t.*

Назовем ряд

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)] + u_1(x,t) \tag{6}$$

обобщенным формальным решением по методу Фурье. Таким образом, (6) есть (5), где ряд $u_0(x,t)$ заменяется на его сумму (схожее обобщенное формальное решение вводилось в [2]).

Теперь $\tilde{u}(x,t)$ уже есть почти везде конечная функция для произвольных суммируемых $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x,t)$. Обозначим через $u_h(x,t)$ классическое решение задачи (1)–(3) при следующих условиях: $\varphi_h(x)$, $\varphi_h'(x)$, $\psi_h(x)$ — абсолютно непрерывные, $L\varphi_h \in L_p[0,1]$ и $\psi_h'(x) \in L_p[0,1]$, $p > 1$, $\varphi_h(0) = \varphi_h(1) = \psi_h(0) = \psi_h(1) = 0$, $f_h(x,t)$ и $f'_{h,t}(x,t)$ непрерывны в Q_T,

$f_h(0,t) = f_h(1,t) = 0$ (по поводу существования таких классических решений см., например, [1, 3]).

Теорема 1. *Если* $\lim \|\varphi_h(x) - \varphi(x)\|_{L[0,1]} = 0$, $\lim \|\psi_h(x) - \psi(x)\|_{L[0,1]} = 0$, $\lim \|f_h(x,t) - f(x,t)\|_{L(Q_T)} = 0$ *при* $h \to 0$, *то* $\lim \|u_h(x,t) - \tilde{u}(x,t)\|_{L(Q_T)} = 0$.

Таким образом, обобщенное формальное решение есть обобщенное решение задачи (1)–(3) в указанном в теореме смысле.

2. Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t),\ x \in [0,1],\ t \in [0,T], \tag{7}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0, \tag{8}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0. \tag{9}$$

Считаем, что $q(x) \in L[0,1]$ и комплекснозначная.

Обозначим через $\tilde{f}(x)$ ($\tilde{f}(x,t)$) 2-периодическую и нечетную по x функцию, причем $\tilde{f}(x) = f(x)$ ($\tilde{f}(x,t) = f(x,t)$) при $x \in [0,1]$.

Введем ряд

$$A(x,t) = a_0(x,t) + a_1(x,t) + a_2(x,t) + \cdots ,$$

где $a_0(x,t) = \frac{1}{2}(\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t))$, $a_n(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}_{n-1}(\eta,\tau)\,d\eta$ $(n \geq 1)$, $f_n(x,t) = -q(x)a_n(x,t)$.

Теорема 2. *Если* $u(x,t)$ *— классическое решение задачи* (7)–(9) *и* $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \in L(Q_T)$, *то имеет место формула*

$$u(x,t) = A(x,t),$$

где ряд $A(x,t)$ *сходится абсолютно и равномерно по* $x, t \in Q_T$ *при любом* $T > 0$.

Ряд $A(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно также и при $\varphi(x) \in L[0,1]$ и представляет собой обобщенное решение задачи (7)–(9).

Аналогичные результаты имеют место и для двух других случаев задачи (1)–(3) при $q(x) \in L[0,1]$: когда $\varphi(x) = 0$, $f(x,t) = 0$ и когда $\varphi(x) = \psi(x) = 0$ (при условии $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \in L(Q_T)$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хромов А. П., Корнев В. В.* Смешанная задача для неоднородного волнового уравнения с суммируемым потенциалом // Докл. АН. 2016. Т. 468, № 5. С. 505–507.

2. *Хромов А. П.* Смешанная задача для неоднородного волнового уравнения с суммируемым потенциалом // Современные методы теории краевых задач «Понтрягинские чтения XXVII». Воронеж, 2016. С. 277–281.

3. *Хромов А. П.* Смешанная задача для волнового уравннеия с суммируемым потенциалом и с ненулевой начальной скоростью // Докл. АН. 2017. Т. 474, № 6. С. 668–670.

УДК 517.984, 517.958

О РЕШЕНИИ НЕОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КОНЦАМИ И НУЛЕВЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В. В. Корнев, А. П. Хромов (Саратов, Россия)

kornevvv@info.sgu.ru, khromovap@info.sgu.ru

Рассмотрим смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t),\ x \in [0,1],\ t \in [0,T], \tag{1}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u'_t(x,0) = 0, \tag{2}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \tag{3}$$

где почти при всех x функция $f(x,t)$ абсолютно непрерывна по t и

$$f(x,t),\ f'_t(x,t) \in L(Q_T), \quad Q_T = [0,1] \times [0,T]. \tag{4}$$

Формальное решение задачи (1)–(3) возьмем в виде (см. [1])

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int\limits_{\gamma_n}\right)\left[\int\limits_0^t (R_\lambda f)\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\right] d\lambda. \tag{5}$$

Продолжим $f(x,t)$ нечетным образом с периодом 2 на все $x \in \mathbb{R}$.

Теорема 1. *Если $f(x,t) \in L(Q_T)$, то при любых $x,t \in Q_T$ ряд* (5) *сходится к функции*

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\eta,\tau)\,d\eta.$$

Теорема 2. *При выплнении условий* (4) *функция $v(x,t)$ удовлетворяет условиям:*

– $v(x,t)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по x и t в Q_T;