где $\beta_{i,k;j,l} = \sum\limits_{r=i-k}^{i} \sum\limits_{s=j-l}^{j} c_{rs} \Omega_{k,r}^{(1,i)} \Omega_{l,s}^{(2,j)}$.

Пример 1. Пусть

$$f(x,y) = \sum_{i,j} c_{i,j} B_{i,j}(x,y),$$

где $x_i = i\sqrt{\pi}$ для $i = 0, 1, ...$ и $y_j = (j-1)\sqrt{\pi}$ для $j = 0, 1, ...$

Далее положим

$D = \{(0,0), (1,0), (0,1)\}$,

$N = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$,

$E = \{(2,1), (1,2), (0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$.

Тогда

$$q(x,y) \ = \begin{vmatrix} 1 & x & y+\sqrt{\pi} \\ c_{21} & c_{11}+2c_{21}\sqrt{\pi} & c_{20}+c_{21}\sqrt{\pi} \\ c_{12} & c_{02}+c_{12}\sqrt{\pi} & c_{11}+2c_{12}\sqrt{\pi} \end{vmatrix}$$

и

$$p(x,y) = \begin{vmatrix} \begin{matrix} c_{10}x + c_{01}(y+\sqrt{\pi}) + \\ +c_{00} + c_{11}x\,(y+\sqrt{\pi}) \end{matrix} & \begin{matrix} (c_{00}+c_{10}\sqrt{\pi})x + (c_{01} + \\ +c_{11}\sqrt{\pi})x\,(y+\sqrt{\pi})) \end{matrix} & \begin{matrix} (c_{00}+c_{01}\sqrt{\pi})\,(y+\sqrt{\pi}) + \\ +(c_{10}+c_{11}\sqrt{\pi})x\,(y+\sqrt{\pi}) \end{matrix} \\ c_{21} & c_{11}+2c_{21}\sqrt{\pi} & c_{20}+c_{21}\sqrt{\pi} \\ c_{12} & c_{02}+c_{12}\sqrt{\pi} & c_{11}+2c_{12}\sqrt{\pi} \end{vmatrix}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lukashov A., Akal C.* Determinant form and a test of convergence for Newton – Padé approximations // Journal of Computational Analysis and Applications. 2013. Vol. 15. P. 55–64.

2. *Cuyt A., Verdonk B.* General order Newton-Padé approximants for multivariate functions // Numerische Mathematik. 1984. Vol. 43. P. 293–307.

УДК 517.51

ОБ УСЛОВИЯХ ВЛОЖЕНИЯ КЛАССОВ В ПРОСТРАНСТВО ЛОРЕНЦА – КАРАМАТЫ[1]

Г. Акишев (Караганда, Казахстан)

akishev@ksu.kz

Рассмотрим множество $SV[1,\infty)$ слабо меняющихся функций на $[1,+\infty)$ (см. [1]). Множество всех положительных , измеримых по Лебегу

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы повышения конкурентоспособности Уральского федерального университета, постановления № 211 Правительства Российской Федерации, контракт № 02.A03.21.0006.

на $[1,\infty)$ функций $b(t)$, для которых $b(t)=(1+\log t)^{\alpha}$ или $(\log 2t)^{\varepsilon}b(t)\uparrow$ и $(\log 2t)^{-\varepsilon}b(t)\downarrow$ на $[1,\infty)$ для любого числа $\varepsilon>0$, обозначим $SVL[1,\infty]$. Нетрудно убедиться , что $SVL[1,\infty)\subset SV[1,\infty)$.

Приведем определение пространства Лоренца – Караматы.

Пусть $\overline{x}=(x_1,\dots,x_m)$, $[0,2\pi]^m=\mathbb{T}^m$, $m\in\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.

Пусть $p\in(1,+\infty)$, $\tau\in[1,+\infty)$ и $b\in SV[1,\infty)$. Пространством Лоренца – Караматы $L_{p,\tau,b}(\mathbb{T}^m)$ называется множество измеримых на $\mathbb{T}^m=[0,2\pi]^m$, имеющих период 2π по каждой переменной $x_j, j=1,\dots,m$ функций $f(\overline{x})$, для которых

$$\|f\|_{p,\tau,b}=\left(\int_0^1 f^{*^{\tau}}(t)(t^{\frac{1}{p}}b(1/t))^{\tau}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\tau}}<+\infty,$$

где $f^*(t)$ -невозрастающая на $(0,1]$ перестановка функции $|f(2\pi\overline{x})|,\overline{x}\in\mathbb{I}^m=[0,1]^m$, (см. [1], [2]).

В частности , если $b(t)=1$, то $L_{p,\tau,b}(\mathbb{T}^m)$ -пространство Лоренца $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$. Известно, что если $\tau=p$, то $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)=L_p(\mathbb{T}^m)$ – пространство Лебега.

$E_n(f)_{p,\tau,b}=\inf_{T\in\mathfrak{F}_{\square_n}}\|f-T\|_{p,\tau,b}$–наилучшее приближение функции $f\in L_{p,\tau,b}(\mathbb{T}^m)$ множеством $\mathfrak{F}_{\square_n}$, тригонометрических полиномов порядка не выше $n-1$ по каждой переменной .

Известно, что для пространств Лоренца справедливы включения $L_{q,\tau_1}(\mathbb{T}^m)\subset L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ в случае $1<p<q<\infty, 1<\tau_1,\tau_2<\infty$ и $L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)\subset L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$, если $1<\tau_1<\tau_2<\infty$.

В одномерном случае достаточное условие принадлежности функции $f\in L_p(\mathbb{T}^1)$ в пространство $L_q(\mathbb{T}^1)$ при $1\le p<q<\infty$ в терминах наилучшего приближения и модуля непрерывности установил П. Л. Ульянов [3]. В дальнейшем эту тематику продолжили В. А. Андриенко [4], Э. А. Стороженко [5], В. И. Коляда [6], Н. Темиргалиев [7, 8], М.К. Потапов, М. Ф. Тиман, П. Освальд, Л. Лейндлер, С. В. Лапин, Б. В. Симонов и др. (см. библиографию в [9]) .

Н. Темиргалиевым [8] для функции одной переменной установлено достаточное условие принадлежности функции $f\in L_p[0,1]$ в пространство Лоренца $L_{p,\tau}[0,1]$ в терминах модуля непрерывности при $1\le\tau<p<\infty$ и доказана неулучшаемость этого условия. В терминах наилучшего приближения функции эта задача исследована Л. А. Шерстневой [10]. Эти вопросы для функции многих переменных в пространстве Лоренца исследованы в [11, 12].

В докладе будут представлены некоторые результаты по этой теме в пространстве Лоренца - Караматы. Для этого пространства известна

Теорема ([2, теорема 3.2]). *Пусть* $0 < p < \infty, 0 < \tau_1, \tau_2 < \infty$ *и* $b_1, b_2 \in SV[1,\infty)$. *Если* $0 < \tau_1 \le \tau_2 < +\infty$, *и*

$$\sup_{0<t<1} \frac{b_2(\frac{1}{t})}{b_1(\frac{1}{t})} < +\infty, \tag{1}$$

то $L_{p,\tau_1,b_1}(\mathbb{T}^m) \subset L_{p,\tau_2,b_2}(\mathbb{T}^m)$.

Рассмотрим m-кратный тригонометрический полином

$$T_{\overline{n}}(\overline{x}) = T_{n_1,\ldots,n_m}(\overline{x}) = \sum_{k_1=-n_1}^{n_1} \ldots \sum_{k_m=-n_m}^{n_m} a_{\overline{k}} e^{i\langle \overline{k},\overline{x}\rangle},$$

где $\langle \bar{k}, \bar{x}\rangle = \sum_{j=1}^m k_j x_j$, $n_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \ldots, m$. Основными результатами являются следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \le \tau_1 < \tau_2 < +\infty$, $b_1, b_2 \in SV[1,+\infty)$ *и выполняется условие* (1). *Тогда для полинома* $T_{\overline{n}}$ *верно неравенство*

$$\|T_{\overline{n}}\|_{p,\tau_1,b_1} \le C\Big[\int_{2^{-m}\prod\limits_{j=1}^m n_j^{-1}}^1 \left(\frac{b_1(1/t)}{b_2(1/t)}\right)^{\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_2-\tau_1}} \frac{dt}{t}\Big]^{\frac{\tau_2-\tau_1}{\tau_1\tau_2}} \|T_{\overline{n}}\|_{p,\tau_2,b_2}.$$

Следствие. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \le \tau_1 < \tau_2 < +\infty$, *функции* b_1, b_2 *удовлетворяют условиям теоремы 1 и* $\frac{b_1}{b_2}$ *-логарифм со степенью или* $\frac{b_1}{b_2} \in SVL[1,\infty)$. *Тогда для полинома* $T_{\overline{n}}$ *имеет место неравенство*

$$\Big\|T_{\overline{n}}\Big\|_{p,\tau_1,b_1} \le C \frac{b_1(\prod\limits_{j=1}^m n_j)}{b_2(\prod\limits_{j=1}^m n_j)} \left(\log \prod_{j=1}^m (n_j+1)\right)^{\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{\tau_2}} \Big\|T_{\overline{n}}\Big\|_{p,\tau_2,b_2}.$$

В случае $n_1 = \ldots = n_m$ *эта оценка точна по порядку.*

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \le \tau_1 < \tau_2 < \infty$, *функции* b_1, b_2 *удовлетворяют условиям следствия. Если* $f \in L_{p,\tau_2,b_2}(\mathbb{T}^m)$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_1(n^m)}{b_2(n^m)}\right)^{\tau_1} \frac{1}{n\left(\log(n+1)\right)^{\frac{\tau_1}{\tau_2}}} E_n^{\tau_1}(f)_{p,\tau_2,b_2} < +\infty, \tag{2}$$

то $f \in L_{p,\tau_1,b_1}(\mathbb{T}^m)$ *и*

$$E_n(f)_{p,\tau_1,b_1} \le C\Big\{\frac{b_1(n^m)}{b_2(n^m)}\big(\log(n+1)\big)^{\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{\tau_2}}$$

$$+\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{b_1(k^m)}{b_2(k^m)}\right)^{\tau_1}\frac{1}{k\big(\log{(k+1)}\big)^{\frac{\tau_1}{\tau_2}}}E_k^{\tau_1}(f)_{p,\tau_2,b_2}\right]^{\frac{1}{\tau_1}}\Bigg\}.$$

Доказана неулучшаемость условия (2) на классе

$$E^{\lambda}_{p,\tau,b}=\{f\in L_{p,\tau,b}(\mathbb{T}^m):\ E_n(f)_{p,\tau,b}\leq\lambda_n, n=1,2,...\},$$

где $\lambda=\{\lambda_n\}$ — последовательность чисел $\lambda_n\downarrow 0$, при $n\to+\infty$.

Отметим, что в случае $b_1(t)=b_2(t)=1, t\in[1,\infty)$, теорема 2 доказана в [13] и следствие совпадает с леммой 10 в [10] (при $\mu=0$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Edmunds D. E., Kerman P., Pick L.* Optimal Sobolev imbeddings involing rearrangement-invariant quasinorms // J. Func. Anal. 2000. Vol. 170. P. 307–355.

2. *Neves J. S.* Lorentz – Karamata spaces, Bessel and Riesz potential and embeddings // Disser. Math. 2002. Vol. 405. P. 1–46.

3. *Ульянов П. Л.* Вложение некоторых классов функций H_p^{ω} // Изв. АН СССР, серия матем. 1968. Т. 32, № 3. С. 649–686.

4. *Андриенко В. А.* Вложения некоторых классов функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967. Т. 31, № 6. С. 1311–1326.

5. *Стороженко Э. А.* Теоремы вложения и наилучшие приближения // Матем. сб. 1975. Т. 97(139), № 2(6). С. 230–241.

6. *Коляда В. И.* Теоремы вложения и неравенства разных метрик для наилучших приближений // Матем. сб. 1977. Т. 102, № 2. С. 195–215.

7. *Темиргалиев Н.* О вложении в некоторые пространства Лоренца // Изв. вузов. Матем. 1980. № 6. С. 83–85.

8. *Темиргалиев Н.* О вложении классов H_p^{ω} в пространства Лоренца // Сиб. матем. журн. 1983. Т. 24, № 2. С. 160–172.

9. *Коляда В. И.* Перестановки функций и теоремы вложения // УМН. 1989. Т. 44. С. 61–95.

10. *Шерстнева Л. А.* О свойствах наилучших приближений Лоренца и некоторые теоремы вложения // Изв. вузов. Матем. 1987. № 10. С. 48–58.

11. *Акишев Г.* О вложении некоторых классов функций многих переменных в пространство Лоренца // Изв. АН Каз.ССР. Сер. физ.-матем. 1982. № 3. С. 47–51.

12. *Смаилов Е. С., Акишев Г.* Теоремы вложения в пространство Лоренца и их приложения // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-матем. 1984. № 1. С. 66–70.

13. *Акишев Г.* Оценки наилучших приближений функций класса логарифмической гладкости в пространстве Лоренца // Тр. ИММ УрО РАН. 2017. Т. 23, № 3. С. 3–21.