Аппроксимативным и экстремальным свойствам пространства $\mathcal{E}(\sigma, q, \alpha)$ посвящена статья С. С. Платонова [1], где, в частности, доказано существование неравенства (1) с конечной константой.

Исследования выполнены совместно с В. В. Арестовым, А. Г. Бабенко, и А. Хорват [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Платонов С. С.* Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой // Известия РАН. Сер. матем. 2007. Т. 71, № 5. С. 149–196.

2. *Arestov V., Babenko A., Deikalova M., and Horváth Á.* Nikol'skii inequality between the uniform norm and the integral q-norm with Bessel weight for entire functions of exponential type on the half-line // Analysis Math. В печати.

УДК 519.853

О МИНИМАЛЬНОМ ПО ПЛОЩАДИ КОЛЬЦЕ, СОДЕРЖАЩЕМ ГРАНИЦУ ДВУМЕРНОГО ВЫПУКЛОГО ТЕЛА

С. И. Дудов, М. А. Осипцев (Саратов, Россия)
dudovsi@info.sgu.ru, osipcevma@gmail.com

1. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — выпуклое тело, не являющееся кругом, $\Omega = \overline{\mathbb{R}^2 \backslash D}$, $\|\cdot\|$ — евклидова норма.

Рассматривается задача

$$\varkappa(x) \equiv R^2(x) - \rho^2(x) \to \min_{x \in D}. \tag{1}$$

Здесь функции

$$R(x) = \max_{y \in D} \|x - y\|, \quad \rho(x) = \min_{y \in \Omega} \|x - y\|$$

выражают, соответственно, расстояния от точки x до самой удаленной точки тела D и до ближайшей точки множества Ω. Поэтому величина $\pi\varkappa(x)$ является площадью кольца с центром в точке x, содержащем границу тела D.

Известно, что функция $R(x)$ является выпуклой на $\mathbb{R}^2$, а функция $\rho(x)$ — вогнутой на D. Соответствующие формулы субдифференциала $\underline{\partial R}(x)$ функции $R(x)$ при любом $x \in \mathbb{R}^2$ и супердифференциала $\overline{\partial \rho}(x)$ функции $\rho(x)$ в точках $x \in intD$ можно найти в [2–4].

Обозначим далее через

$$Q^R(x) = \{z \in D : R(x) = \|x - z\|\}, \quad Q^\rho(x) = \{z \in \Omega : \rho(x) = \|x - z\|\},$$

$co\, A$ — выпуклая оболочка множества A.

Теорема 1. *Функция $\varkappa(x)$ является выпуклой и конечной на $\mathbb{R}^2$. Формулу ее субдифференциала можно выразить следующем виде*

$$\underline{\partial \varkappa}(x) = \begin{cases} 2(R(x)\underline{\partial R}(x) - \rho(x)\overline{\partial \rho}(x)), & \textit{если } x \in intD, \\ 2R(x)\underline{\partial R}(x), & \textit{если } x \in \Omega. \end{cases}$$

Кроме того, если D — строго выпуклое тело, то $\varkappa(x)$ является строго квазивыпуклой функцией на D.

Теорема 2. *Для того, чтобы точка $x^* \in D$ доставляла минимальное значение функции $\varkappa(x)$ на выпуклом теле D необходимо и достаточно, чтобы*

$$coQ^R(x^*) \cap coQ^\rho(x^*) \neq \emptyset.$$

Теорема 3. *Если D — строго выпуклое тело, то задача* (1) *имеет единственное решение.*

2. Авторам неизвестно, рассматривалась ли задача (1) кем-либо ранее. В качестве близких по постановке можно привести задачу

$$\varphi(x) \equiv R(x) - \rho(x) \to \min_{x \in D} \tag{2}$$

— о кольце наименьшей ширины, содержащем границу выпуклого тела D (см. [1] и ссылки на др. работы, а также [5]), и задачу об асферичности тела D ([6])

$$\psi(x) \equiv \frac{R(x)}{\rho(x)} \to \min_{x \in D}. \tag{3}$$

Известно, что задача (2) имеет единственное решение ([5]), которое является, в то же время, одним из решений задачи (3) (см. [6]). Примеры показывают, что задачи (1) и (3) могут иметь неединственное решение. Обозначим через $C_\varkappa, C_\varphi, C_\psi$ — множества точек минимума целевых функций в задачах (1), (2) и (3) соответственно.

Теорема 4. *Имеет место соотношение*

$$C_\varphi = C_\varkappa \cap C_\psi.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боннезен Т., Фенхель В.* Теория выпуклых тел. М. : Фазис, 2002. 210 с.

2. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М. : Наука, 1980. 320 с.

3. *Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.* Недифференцируемая оптимизация. М.:Наука, 1981. 384 с.

4. *Дудов С. И.* Субдифференцируемость и супердифференцируемость функции расстояния // Матем. заметки. 1997. Т. 61, № 4. С. 530–542.

5. *Дудов С. И.* Об оценке границы выпуклого компакта шаровым слоем // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2001. Т. 1, вып. 2. С. 64–75.

6. *Дудов С. И., Мещерякова Е. А.* Об асферичности выпуклого тела // Изв. вузов. Сер. Матем. 2015. № 2. С. 45–58.

УДК 517.52

ТЕОРЕМА ХАРДИ – ЛИТТЛЬВУДА ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ С ОБОБЩЕННО-МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[1]

М. И. Дьяченко (Москва, Россия),
А. Муканов (Астана, Казахстан),
С. Ю. Тихонов (Барселона, Испания)
dyach@mail.ru

Хорошо известен следующий результат Г. Харди – Дж. Литтльвуда [1].

Теорема А. *Пусть $f(x)$ есть сумма ряда*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{1}$$

коэффициенты которого $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно стремятся к нулю. Тогда для любого $1<p<\infty$ имеем

$$\|f\|_{L^p(0,2\pi)}\asymp\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{p-2}(a_n^p+b_n^p)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Результаты такого типа весьма важны и неудивительно, что теорема А обобщалась в различных направлениях многими авторами. В частности, можно упомянуть работы [2–7]. Отметим еще, что первый аналог теоремы А для пространств Лоренца был установлен в работе [2].

Напомним определение весовых пространств Лебега и пространств Лоренца. Пусть μ — мера Лебега на $[0,2\pi]$, f — μ-измеримая функция на $[0,2\pi]$. Тогда обозначим через f^* невозрастающую перестановку f, т.е.

$$f^*(t)=\inf\{\sigma:\ \mu\{x\in[0,2\pi]:\ |f(x)|>\sigma\}\le t\}.$$

Определение 1. Пусть $0<p\le\infty$ и $0<q\le\infty$. Тогда *пространство Лоренца* $L_{p,q}([0,2\pi])$ — это множество всех μ-измеримых функций,

[1]Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ ((проект N 18-01-00281).