2. *Лукашенко Т. П.* О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2001. № 1. С. 6–10.

3. *Галатенко В. В.* Об орторекурсивном разложении с ошибками в вычислении коэффициентов // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69, вып. 1. С. 3–16.

4. *Галатенко В. В.* Об орторекурсивном разложении по некоторой системе функций с ошибками при вычислении коэффициентов // Матем. сб. 2004. Т. 195, № 7. С. 21–36.

5. *Кудрявцев А. Ю.* Орторекурсивные разложения по системам сжатий и сдвигов фиксированной функции // Современные методы теории функций и смежные проблемы : тез. докл. Воронежской зимней матем. шк. Воронеж : ВГУ, 2001. С. 161–162.

6. *Кудрявцев А. Ю.* Орторекурсивные разложения по системам сжатий и сдвигов // Современные проблемы теории функций и их приложения : тез. докл. 11-й Саратовской зимней шк. Саратов : Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2002. С. 106–108.

7. *Политов В. А.* Орторекурсивные разложения в гильбертовых пространствах // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2010. № 3. С. 3–7.

8. *Галатенко В. В., Лукашенко Т. П., Садовничий В. А.* О сходимости почти всюду орторекурсивных разложений по системам сжатий и сдвигов // Теория функций, её приложения и смежные вопросы : материалы 13-й международной Казанской летней научной шк.-конф. Казань : Изд-во Казанск. матем. о-ва, 2017. С. 99–101.

УДК 517.984

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ С КУСОЧНО-ЦЕЛЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ НА КРИВОЙ

А. А. Голубков (Москва, Россия)
andrej2501@yandex.ru

Обратная задача для уравнения Штурма – Лиувилля

$$u''(z) + (Q(z) - \lambda^2)u(z) = 0 \tag{1}$$

хорошо изучена только для случая вещественной переменной [1–2]. В докладе впервые поставлена обратная спектральная задача для уравнения (1) с потенциалом Q, кусочно-целым на лежащей в $\mathbf{C}$ спрямляемой кривой, и доказана единственность её решения. Показано, что хотя эта задача и может быть сведена к частично исследованной в [3] обратной задаче для уравнения Штурма – Лиувилля обобщенного вида с комплекснозначными коэффициентами на отрезке действительной оси, её непосредственное исследование более эффективно.

Определение. Функцию Q будем называть *кусочно-целой* на кривой $\gamma \subset \mathbf{C}$, соединяющей точки z_0, z_f и допускающей параметрическое задание непрерывной функцией $z = z(t)$ $(t \in [t_0, t_f], z(t_0) = z_0, z(t_f) = z_f)$, если Q ограничена на этой кривой и совпадает на ней с конечным числом целых функций. Т.е. существуют такие целое число $N \geq 0$ и набор чисел $T = \{t_j\}_0^{N+1} : t_0 < t_1 < \ldots < t_{N+1} \equiv t_f$, что

$$Q(z(t)) = Q_i(z), \text{ если } t \in (t_i, t_{i+1}) \quad (i = \overline{0, N}), \tag{2}$$

где все Q_i — целые функции. Причём, если $N \geq 1$, то для любого $n \in \in \{1, \ldots, N\}$ функции Q_n и Q_{n-1} различны.

В докладе рассматриваются решения (1) вдоль спрямляемых кривых $\gamma \subset \mathbf{C}$, на которых функция Q является кусочно-целой. При этом под решениями (1) вдоль γ понимаются решения, непрерывно дифференцируемые вдоль γ. В силу (2) функция Q и все её производные вдоль кривой γ имеют конечные односторонние пределы в точках $z_j := z(t_j)$ $(j = \overline{0, N+1})$. Если $N \geq 1$, то по определению для всех $n \in \{1, \ldots, N\}$ функции Q_n и Q_{n-1} различны. Поэтому односторонние пределы функции Q или хотя бы одной её производной конечного порядка вдоль кривой γ различны при подходе к z_n «слева» и «справа». Будем называть такие точки *точками обобщенного скачка* функции Q на кривой γ.

Определение. Пусть $u_1(z), u_2(z)$ — непрерывно-дифференцируемые решения (1) вдоль спрямляемой кривой γ, проходящей через точку z_b, удовлетворяющие условиям $u_1(z_b) = 1$, $u_1'(z_b) = 0$, $u_2(z_b) = 0$, $u_2'(z_b) = 1$. Будем называть матрицу $\hat{P}(\gamma, z, z_b) = \begin{pmatrix} u_1(z) & u_2(z) \\ u_1'(z) & u_2'(z) \end{pmatrix}$ *передаточной матрицей уравнения (1) между точками z_b и z кривой γ.*

Определение. Назовём $W := \{N, \{z_j\}_0^{N+1}, \{Q_i\}_0^N\}$ набором ключевых данных кривой γ, на которой (2) задаёт функцию Q.

Лемма. *Если функция Q является кусочно-целой на спрямляемой кривой γ, соединяющей точки z_0 и z_f, то передаточная матрица $\hat{P}(\gamma, z_f, z_0)$ уравнения (1) существует и однозначно определяется заданием λ и набора ключевых данных W.*

Следствие. *Пусть функция Q задана на спрямляемой кривой γ с помощью (2), $z^{(d)} \in \gamma_i$ (γ_i — участок γ, соединяющий точки z_i и z_{i+1}, $i \in \{0, \ldots, N\}$), $\gamma^{(d)}$ — спрямляемая кривая с началом и концом в $z^{(d)}$ и $Q(z) = F(z)$, если $z \in \gamma^{(d)} \backslash z^{(d)}$. Здесь $F(z)$ — целая функция, причем $F \neq Q_i$, а также $F \neq Q_{i-1}$, если $z^{(d)} = z_i$, $i \neq 0$, и $F \neq Q_{i+1}$, если $z^{(d)} = z_{i+1}$, $i \neq N$. Тогда вставка в γ участка $\gamma^{(d)}$ не меняет передаточную матрицу, положения конечной и начальной точек кривой и увеличивает число точек обобщенного скачка функции Q на кривой. Участок $\gamma^{(d)}$ описанного типа будем назвать «невидимой петлей».*

Определение. Спрямляемая кривая (с заданной на ней кусочно-целой функцией) без «невидимых петель» называется *простой.*

Определение. Набор ключевых данных W называется *простым*, если $\Delta z_i := z_{i+1} - z_i \neq 0$ для всех $n \in \{1, \dots, N\}$.

Любая спрямляемая кривая с простым набором ключевых данных, будет простой и наоборот.

Итак, при заданной точке z_0 передаточная матрица уравнения (1) с кусочно-целым потенциалом может соответствовать бесконечно большому числу различных спрямляемых кривых, отличающихся количеством и расположением «невидимых петель», и, следовательно, наборами ключевых данных. Из кривой с «невидимыми петлями» всегда можно выделить кривую без таких петель с той же передаточной матрицей. Поэтому, если передаточной матрице соответствует хотя бы одна кривая, то ей соответствует и хотя бы один простой набор ключевых данных. Оказывается, что этот простой набор данных является единственным.

Теорема. *Пусть функция Q — кусочно-целая на некоторой (не заданной) спрямляемой кривой γ. Тогда задание точки z_0 и столбца или строки передаточной матрицы уравнения* (1) *между z_0 и не заданной конечной точкой кривой γ на имеющем хотя бы одну конечную предельную точку множестве точек комплексной плоскости параметра $\rho = \lambda^2$ однозначно определяет набор ключевых данных W простой кривой, выделенной из γ.*

Доказательство теоремы основано на свойствах полученной в докладе асимптотики передаточной матрицы, элементы которой при больших значениях $|\lambda|$ могут быть записаны в виде:

$$p_{\alpha\beta} = \left(\sum_{j=1}^{2^N} d_{\alpha 1}^{(j)} \exp\{\lambda h_{j+}\} \right) a_{1\beta}^{(0)} + \left(\sum_{j=1}^{2^N} d_{\alpha 2}^{(j)} \exp\{\lambda h_{j-}\} \right) a_{2\beta}^{(0)}. \qquad (3)$$

Здесь $\alpha, \beta \in \{1, 2\}$, $h_{j\pm} = \pm\Delta z_0 + \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i \Delta z_i$, $\alpha_i \in \{\pm 1\} (i = \overline{1, N})$, $j = 1 + \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{(1+\alpha_i)}{2} 2^{i-1}$ (т.е. $j \in \{1, \dots, 2^N\}$), $d_{\alpha\beta}^{(j)} = (1/\lambda)^{m_{\alpha\beta}^{(j)}} \delta_{\alpha\beta}^{(j)} (1 + O(1)/\lambda)$ $(j = \overline{1, 2^N})$, где конечные целые $m_{\alpha\beta}^{(j)} \geq 0$ и комплексные $\delta_{\alpha\beta}^{(j)} \neq 0$ не зависят от λ, а $a_{\alpha\beta}^{(0)}$ при больших значениях $|\lambda|$ отличны от нуля и представимы в виде асимптотического ряда по $1/\lambda$, коэффициенты которого зависят от значений функции Q и её производных в точке z_0. При этом в случае простых кривых существует как минимум два противоположно направленных луча, исходящих из нуля комплексной плоскости параметра λ, и два узких сектора, содержащих эти лучи, таких, что для каждого такого сектора и каждого элемента передаточной матрицы среди 2^{N+1}

слагаемых в (3) существует ровно одно, имеющее наибольший экспоненциальный рост при $\lambda \to \infty$ в этом секторе.

В докладе подробно рассмотрена взаимная связь исследованной задачи с обратной задачей для простейшего обобщенного уравнения Штурма – Лиувилля с кусочно-целыми коэффициентами на отрезке действительной оси: $(r^{-1}(x)u'(x))' + (\widetilde{Q}(x) - r(x)\lambda^2)u(x) = 0$, где $r(x)$ — отличная от нуля и ограниченная кусочно-постоянная функция, а $\widetilde{Q}$ — произвольная кусочно-целая функция. На этом примере показаны возникающие при переходе к комплексной переменной дополнительные возможности по сравнению с существующими методами исследования обратных задач для обобщенных уравнений Штурма – Лиувилля на отрезке действительной оси.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марченко В. А.* Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. Киев : Наукова думка, 1977. 331 с.

2. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2007. 384 с.

3. *Голубков А. А., Макаров В. А.* Обратная спектральная задача для обобщенного уравнения Штурма – Лиувилля с комплекснозначными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 10. С. 1498–1502.

УДК 517.9

РАСХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ФРАКТАЛЬНОСТЬ ИХ ГРАФИКОВ[1]

М. Л. Гриднев (Екатеринбург, Россия)

coraxcoraxg@gmail.com

В работе [1] были введены классы непрерывных функций с ограничением на фрактальность их графиков и исследовалась задача о взаимосвязи этих классов с классами функций обобщенной ограниченной вариации. В докладе планируется обсудить результаты работы [1] и полученные результаты о поведении рядов Фурье функций из введенных классов[2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гриднев М. Л.* О классах функций с ограничением на фрактальность их графика // Modern Problems in Mathematics and its Applications : Proc. 48th Intern. Youth School-Conf. Yekaterinburg, Russia, February 5-11, 2017. P. 167–173. URL: http://ceur-ws.org/Vol-1894/appr5.pdf.

2. *Gridnev M. L.* Divergence of Fourier series of continuous functions with restriction on the fractality of their graphs // Ural Math. J. Vol. 3, № 2. P. 46–50.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 14-11-00702).