УДК 517.5

Свойства линий уровня биполярной функции Грина на торе и разложение Наттолла[1]

С. Р. Насыров (Казань, Россия)
semen.nasyrov@yandex.ru

Мы изучаем биполярную функцию Грина на трехлистной римановой поверхности, являющейся комплексным тором. Нахождение ее нулевых линий уровня дает возможность описать разложение Наттолла этого тора. Это разложение связано с нахождением максимальных областей сходимости аппроксимантов Паде-Эрмита в случае приближения ими многозначных аналитических функций с тремя особыми точками. Мы даем полное описание топологической структуры разложения Наттолла в случае, когда особые точки располагаются в вершинах равнобедренного треугольника с углом при вершине, не превосходящем $\pi/3$. В остальных случаях мы даем такое описание при дополнительном предположении о геометрической структуре нулевой линии уровня биполярной функции Грина.

Ключевые слова: биполярную функцию Грина, разложение Наттолла, аппроксимации Паде-Эрмита, область сходимости.

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 23-11-00066).

Properties of level sets of bipolar Green function on a torus and Nuttall decomposition[1]

S. R. Nasyrov (Kazan, Russia)
semen.nasyrov@yandex.ru

We study the bipolar Green function on a three-sheeted Reiemann surface which is a complex torus. Finding the null set of this function give a possibility to describe the Nuttall decomposition of the torus. Such decomposition is connected with the problem of finding maximal convergence domains for Pade–Hermite approximants when se approximate multi-valued functions with three branch points. We give a full description of the topological structure of the Nuttall decomposition in the case when the branch points form an isosceles triangle with angle at vertex less than $\pi/3$. In other cases, we give such description under an additional requirement on the null set of the bipolar Green function.

Keywords: bipolar Green function, Nuttall decomposition, Pade-Hermite approximants, convergence domain.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 23-11-00066).

Мы исследуем разложение Наттолла трехлистного тора T, являющегося римановой поверхностью функции $w = \sqrt[3]{(\tau - a_1)(\tau - a_2)(\tau - a_3)}$, где a_j попарно различны. Это разложение связано с абелевым интегралом, имеющим логарифмические особенности в точках T, лежащих над бесконечно удаленной точкой. Действительная часть этого интеграла является однозначной гармонической функций V на T, и разложение Наттолла тора T на три листа связано со значениями функции V в трех точках, проекции которых на сферу Римана совпадают. Пусть точки $\tau^{(0)} = \tau^{(0)}(\tau)$, $\tau^{(1)} = \tau^{(1)}(\tau)$ и $\tau^{(2)} = \tau^{(2)}(\tau)$ лежат над точкой τ и значения функции V в этих точках попарно различны. Выберем нумерацию этих точек таким образом, что выполняется неравенство $V(\tau^{(0)}) > V(\tau^{(1)}) > V(\tau^{(2)})$. Тогда множество точек $\tau^{(0)}(z)$, $\tau \in \mathbb{C}$, образует нулевой лист поверхности. Аналогично определяются первый и второй листы. На кривых, являющихся проекциями линий склейки листов на плоскость нумерация точек определяется, естественно, неоднозначно. Описанное разложение тора на листы называется разложением Наттолла. Согласно гипотезе Наттолла [1], эти линии на комплексной плоскости притягивают полюсы диагональных аппроксимантов Паде–Эрмита. В работе А. И. Аптекарева и Д. Н. Тулякова [2] полностью описана структура листов Наттолла в случае, когда треугольник Tr с вершинами a_1, a_2 и a_3 близок к правильному. Здесь мы используем подход, связанный с эллиптическими функциями Вейерштрасса на универсальном накрытии тора.

Абелев интеграл на торе T определяется соответствующий абелев интеграл на универсальной накрывающей этого тора, которая является комплексной плоскостью $\mathbb{C}$. Действительная часть этого интеграла является гармонической функцией, которая может быть выражена через эллиптическую σ-функцию Вейерштрасса:

$$v(z) = -2\ln\sigma|z-\alpha| + \ln\sigma|z-\alpha e^{i2\pi/3}| + \ln\sigma|z-\alpha e^{i2\pi/3}| - \sqrt{3}\eta_1 \mathrm{Re}\,(z\overline{\alpha}).$$

Здесь $\sigma(z)$ — σ-функция Вейерштрасса с периодами

$$\omega_1 = \sqrt{3} \text{ и } \omega_2 = \sqrt{3}e^{i\pi/3};$$

$\eta_1 = 2\zeta(\omega_1/2)$, где $\zeta(z)$ — ζ-функция Вейерштрасса с периодами ω_1 и ω_2; α — точка, лежащая в треугольнике Δ с вершинами в точках 0, $e^{i\pi/6}$ и $e^{-i\pi/6}$ и не совпадающая с его вершинами. Отметим, что положение точки α в треугольнике Δ характеризуется геометрическими свойствами треугольника Tr с вершинами a_1, a_2 и a_3. В случае правильного треугольника Tr точка α лежит в центре треугольника Δ, в случае равнобедренного треугольника Tr — на одной из биссектрис Δ, наконец, если точки a_1, a_2 и a_3 лежат на одной прямой, то α находится на одной из сторон треугольника Δ.

Отметим, что универсальное накрытие тора $p : \mathbb{C} \to T$ устроено таким образом, что при повороте точки плоскости z на углы $\pm 2\pi/3$ точка $p(z)$ переходит в точки $p(e^{\pm i2\pi/3}z)$ на торе с той же проекцией на комплексную плоскость. Поэтому для описания структуры листов в разложении Наттолла достаточно сравнить значения функции v в точках z и $e^{\pm i2\pi/3}z$. В силу симметрии поворота можно сравнивать значения $v(e^{i2\pi/3}z)$ и $v(e^{-i2\pi/3}z)$. При этом, равенство этих значений равносильно равенству $u(z)=0$, где

$$u(z)=\ln\sigma|z-\alpha e^{-i2\pi/3}|-\ln\sigma|z-\alpha e^{i2\pi/3}|-\eta_1\mathrm{Im}\,(z\overline{\alpha}).$$

Отметим, что функция $u(z)$ является двоякопериодической функцией (с периодами ω_1 и ω_2) на плоскости с двумя логарифмическими особенностями в каждой фундаментальной области (т.е. области, содержащей по одной точке из класса эквивалентности по модулю решетки Ω, порожденной векторами ω_1 и ω_2), поэтому она индуцирует однозначную гармоническую функцию на торе с двумя логарифмическими особенностями, которую можно назвать биполярной функцией Грина.

Таким образом, для описания разложения Наттолла следует изучить нулевое множество

$$L(u,0)=\{z\in\mathbb{C}\mid u(z)=0\}$$

функции u. Его структура зависит от того, содержит оно критические точки функции u или нет. Установлено, что в каждой фундаментальной области функция $u(z)$ имеет ровно две критические точки (с учетом кратности). При этом, критическая точка двойная тогда и только тогда, когда α совпадает с центром треугольника Δ. Кроме того, установлено, что критические точки лежат в нулевом множестве $L(u,0)$ тогда и только тогда, когда α либо лежит на границе треугольника Δ, либо на одном из перпендикуляров, опущенных из центра Δ на одну из его сторон. Заметим, что второй случай означает, что треугольник Tr является равнобедренным с углом при вершине, большим $\pi/3$.

После установления структуры множества $L(u,0)$ возникает задача об описании множества, которое является пересечением $L(u,0)$ и множеств, которые получаются из него поворотами на углы $\pm i2\pi/3$. В силу специфики функции $u(z)$ оказывается, что пересечение всех трех множеств указанных совпадает с пересечением любых двух из них.

Многочисленные численные эксперименты позволяют высказать гипотезу о том, что в любой фундаментальной области это пересечение состоит из трех точек, эквивалентных вершинам треугольника Δ, а также трех точек, которые получаются друг из друга поворотами на углы $\pm i2\pi/3 \pmod{\Omega}$.

Нам удалось строго доказать справедливость этой гипотезы в случае, когда Tr является равнобедренным с углом при вершине, меньшим

$\pi/3$; в терминах параметра α это означает, что α лежит на одном из отрезков, соединяющих вершины треугольника Δ с его центром. В этом случае полностью описана структура разложения Наттолла трехлистного тора. В остальных случаях дано полное описание в предположении справедливости этой гипотезы.

Доказательство в случае равнобедренных треугольников с углом при вершине, меньшим $\pi/3$, основано на следующем факте.

Теорема. *Множество $L(u, 0)$ состоит из объединения бесконечного числа горизонтальных прямых и кривых, являющихся графиками периодических функций с периодом ω_1; это множество инвариантно при сдвигах на векторы решетки Ω. Угол наклона касательной в любой точке любой кривой этого семейства по абсолютной величине строго меньше $\pi/3$.*

Доказательство теоремы дает основания надеяться, что справедливость гипотезы о точках пересечении может быть установлена аналогичным образом и для треугольников, достаточно близких к равнобедренным с углом при вершине, меньшим $\pi/3$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Nuttall J.* Asymptotics of diagonal Hermite-Padé polynomials // J. Approx. Theory. — 1984. — V. 42, No 4. — P. 299–386.

[2] *Аптекарев А. И., Туляков Д. Н.* Абелев интеграл Наттолла на римановой поверхности кубического корня многочлена третьей степени // Изв. РАН. Сер. матем. — 2016. — Т. 80, No 6. — P. 5–42.