УДК 517.518.126

A-интеграл для измеримых по Риману векторнозначных функций[1]

К. М. Нараленков (Москва, Россия)
naralenkov@gmail.com

В настоящей работе предложены два возможных обобщения A-интеграла в классе измеримых по Риману функций, изучены их основные свойства, а также взаимосвязь друг с другом и с интегралом Биркгофа.

Ключевые слова: интегралы Биркгофа, Мак-Шейна и Хенстока, A-интеграл Римана, A-интеграл, измеримая по Риману функция, постоянный масштаб.

The A-integral for Riemann-measurable vector-valued functions[1]

K. M. Naralenkov (Moscow, Russia)
naralenkov@gmail.com

We propose two possible generalizations of the A-integral within the Riemann measurable functions class and study their basic properties, relation to one another, and to the Birkhoff integral.

Keywords: Birkhoff, McShane, Henstock, A-Riemann, and A-integrals, Riemann measurable function, constant gauge.

Измеримая действительная функция f, определённая на отрезке $[a,b]$, называется A-*интегрируемой* на $[a,b]$, с A-*интегралом* w, если $n\cdot\mu\{t\in[a,b]:|f(t)|>n\}\to 0$ и $\int\limits_{\{t\in[a,b]:|f(t)|\leqslant n\}} f(t)\,d\mu\to w$ при $n\to\infty$. В 1929 году Э. Титчмарш [1] предложил A-интеграл для интегрирования сопряжённых функций и отметил, что первое из двух приведённых выше условий необходимо для обеспечения его аддитивности по отношению к подынтегральной функции. А.Н. Колмогоров в 1933 году [2] ввёл понятие обобщённого математического ожидания случайной величины фактически в терминах A-интеграла. На протяжении многих лет определение интеграла, введённое Титчмаршем, привлекает значительное внимание математиков (см. обзорные статьи [3] и [4]).

В векторнозначной ситуации очевидно не существует канонического обобщения определения Титчмарша, поскольку *«измеримая функция»*, как и *«суммируемая функция»*, могут быть определены многими различными способами. Единственными опубликованными обобщениями A-интеграла на векторный случай, по-видимому, являются определения

В.И. Рыбакова 1970 года (A-O)- и A-интегралов [5] и определение И. Тагучи 1983 года (ER)-интеграла [6] в классе *измеримых по Бохнеру* функций. В настоящей статье представлены два определения A-интеграла в классе *измеримых по Риману* функций [7]. Наше первое определение риманового типа с *постоянными масштабами* даёт *A-интеграл Римана*, в то время как наше второе определение является прямым обобщением конструкции Титчмарша. Эти два определения оказываются эквивалентны для функций, к которым они оба применимы. Хотим сделать ещё одно наблюдение: Рыбаков и Тагучи для определения (A-O)- и A-интегралов и (ER)-интеграла соответственно используют другой тип срезок подынтегральной функции, который Рыбаков называет *срезками первого рода* (срезки, используемые в настоящей работе, в его терминологии называются *срезками второго рода*). Тем не менее, A-интеграл Рыбакова, (ER)-интеграл и наше второе определение A-интеграла совпадают (для измеримых по Бохнеру функций) вследствие того, что все эти три понятия интеграла включают упомянутое выше первое условие Титчмарша для подынтегральной функции.

Пусть X — действительное банахово пространство и $[a, b]$ есть фиксированный невырожденный отрезок действительной оси. На протяжении всей работы I будет обозначать произвольный невырожденный подотрезок отрезка $[a, b]$. *Характеристическая функция* множества E будет обозначаться через χ_E. Положительная функция, определённая на множестве E, будет называться *масштабом* на множестве E. Наконец, μ обозначает меру Лебега на действительной оси.

Частичное разбиение Мак-Шейна отрезка $[a, b]$ есть конечный набор $\{(I_k, t_k)\}_{k=1}^K$ пар отрезок-точка такой, что отрезки $\{I_k\}_{k=1}^K$ попарно не перекрываются и $t_k \in [a, b]$ для каждого k. Частичное разбиение Мак-Шейна отрезка $[a, b]$ называется *частичным разбиением Хенстока* отрезка $[a, b]$ если $t_k \in I_k$ для всех k. Частичное разбиение Мак-Шейна (Хенстока) отрезка $[a, b]$ называется *разбиением Мак-Шейна (Хенстока)* отрезка $[a, b]$ если его отрезки *покрывают* отрезок $[a, b]$.

Определение 1. Функция $f : [a, b] \to X$ называется *интегрируемой по Мак-Шейну (Хенстоку)* на $[a, b]$, с *интегралом Мак-Шейна (Хенстока)* $w \in X$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется масштаб δ на $[a, b]$ такой, что неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{K} f(t_k)\mu(I_k) - w \right\| < \varepsilon$$

выполняется для всякого разбиения Мак-Шейна (Хенстока) $\{(I_k, t_k)\}_{k=1}^K$ отрезка $[a, b]$ с условием $I_k \subset (t_k - \delta(t_k), t_k + \delta(t_k))$ для всех k.

Определение 2. Функция $f : [a, b] \to X$ *$\mathcal{M}$-интегрируема* ($\mathcal{H}$-

интегрируема) на $[a, b]$ если она интегрируема по Мак-Шейну (Хенстоку) на $[a, b]$ и каждому $\varepsilon > 0$ в определении интеграла Мак-Шейна (Хенстока) функции f по $[a, b]$ соответствует *измеримый* масштаб δ.

Определение 3. Функция $f : [a, b] \to X$ называется *измеримой по Риману* на измеримом множестве $E \subset [a, b]$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся замкнутое множество $F \subset E$, удовлетворяющее условию $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$, и положительное число δ такие, что неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{K} \{f(t_k) - f(t'_k)\} \cdot \mu(I_k) \right\| < \varepsilon$$

выполняется для всякого конечного набора $\{I_k\}_{k=1}^{K}$ попарно неперекрывающихся отрезков с условием $\max\limits_{1 \le k \le K} \mu(I_k) < \delta$ и для всех $t_k, t'_k \in I_k \cap F$.

Все $\mathcal{H}$-интегрируемые функции обязательно измеримы по Риману, более того, интеграл Мак-Шейна (Хенстока) оказывается эквивалентен $\mathcal{M}$-интегралу ($\mathcal{H}$-интегралу) для измеримых по Риману функций [7]. Также для наших целей весьма важным является тот факт, что любая ограниченная измеримая по Риману функция необходимо $\mathcal{M}$-интегрируема [7].

Определения *интеграла Биркгофа* (эквивалентного $\mathcal{M}$-интегралу [8]) и *абсолютного интеграла Биркгофа* можно найти в работе [9].

Для данных функции $f : [a, b] \to X$ и натурального числа n, мы будем обозначать множество $\{t \in [a, b] : \|f(t)\| > n\}$ через $E_n(f)$, а функцию $f \cdot \chi_{[a,b] \setminus E_n(f)}$ через $[f]^n$.

Определение 6. Функция $f : [a, b] \to X$ называется *A-интегрируемой по Риману* на $[a, b]$, с *A-интегралом Римана* $w \in X$, если для каждого $\varepsilon > 0$ и каждого бесконечного множества $S \subset \mathbb{N}$ найдутся $N \in S$, открытое множество G, удовлетворяющее условиям $E_N(f) \subset G$ и $N\mu(G) < \varepsilon$, и положительное число δ такие, что неравенство

$$\left\| \sum_{k : I_k \not\subset G} f(t_k)\mu(I_k) - w \right\| < \varepsilon$$

выполняется для всякого $\{(I_k, t_k)\}_{k=1}^{K}$ разбиения Хенстока отрезка $[a, b]$ с условиями $\max\limits_{1 \le k \le K} \mu(I_k) < \delta$ и $t_k \notin G$, если $I_k \not\subset G$, для всех k.

Определение 7. Пусть функция $f : [a, b] \to X$ измерима по Риману на отрезке $[a, b]$ и множество $E_n(f)$ измеримо для каждого $n \in \mathbb{N}$ кроме, возможно, конечного множества $T \subset \mathbb{N}$. Функция f называется *A-интегрируемой* на отрезке $[a, b]$, с *A-интегралом* $w \in X$, если $n \cdot \mu(E_n(f)) \to 0$ и $(\mathcal{M}) \int\limits_a^b [f]^n \to w$ при $n \to \infty$.

Теорема 1. *Пусть $f : [a,b] \to X$. Тогда A-интеграл Римана функции f по $[a,b]$, если он существует, единствен.*

Теорема 2. *Если функции $f_1, f_2 : [a,b] \to X$ A-интегрируемы по Риману на $[a,b]$ к $w_1 \in X$ и $w_2 \in X$ соответственно, то функция $f_1 + f_2$ A-интегрируема по Риману на $[a,b]$ к $w_1 + w_2$.*

Теорема 3. *Если функция $f : [a,b] \to X$ абсолютно интегрируема по Биркгофу на $[a,b]$, то она A-интегрируема по Риману на $[a,b]$ к $(Bk)\int\limits_a^b f$.*

В то же время, существует измеримая по Бохнеру функция, которая интегрируема по Биркгофу и A-интегрируема по Риману, но не является абсолютно интегрируемой по Биркгофу. Также отметим, что существует измеримая по Бохнеру функция, которая интегрируема по Биркгофу и не является A-интегрируемой по Риману.

Теорема 4. *Если функция $f : [a,b] \to X$ A-интегрируема на $[a,b]$ к $w \in X$, то она A-интегрируема по Риману на $[a,b]$ к w.*

Теорема 5. *Если функция $f : [a,b] \to X$ A-интегрируема по Риману на $[a,b]$ к $w \in X$ и множество $E_n(f)$ измеримо для каждого $n \in \mathbb{N}$ кроме, возможно, конечного множества $T \subset \mathbb{N}$, то она A-интегрируема на $[a,b]$ к w.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Titchmarsh E. C.* On Conjugate Functions // Proc. London Math. Soc. (2) 1929. V. 29, № 1. P. 49–80.

[2] *Колмогоров А. Н.* Основные понятия теории вероятностей. // М.–Л. : ОНТИ, 1936. 80 с.

[3] *Виноградова И. А., Скворцов В. А.* Обобщенные интегралы и ряды Фурье // Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анал. М. : ВИНИТИ, 1971. С. 65–107.

[4] *Лукашенко Т. П.* A-интеграл и его применение в исследованиях П. Л. Ульянова и других математиков // Изв. вузов. Матем. 2008. № 5. С. 77–82.

[5] *Рыбаков В. И.* A-интегралы от векторнозначных функций // Уч. зап. Свердл. гос. пед. ин-т. 1970. Сб. 102. С. 36–41.

[6] *Taguchi Y.* A generalization of the Bochner integral by the method of ranked spaces // TRU Math. 1983. V. 19, № 2, P. 141–162.

[7] *Naralenkov K. M.* A Lusin type measurability property for vector-valued functions // J. Math. Anal. Appl. 2014. V. 417, № 1. P. 293–307.

[8] *Солодов А. П.* О границах обобщения интеграла Колмогорова // Матем. заметки. 2005. Т. 77, № 2. С. 258–272.

[9] *Нараленков К. М.* Об абсолютной интегрируемости измеримых по Риману векторнозначных функций // Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 20-й международной Саратовской зимней школы. Саратов : Научная книга, 2020. С. 268–272.