Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Саратовский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского»

ФИЗИЧЕСКИЙ ПРАКТИКУМ
МЕХАНИКА
СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Учебно-методическое пособие
для студентов физического
и других естественных факультетов

Под редакцией профессора *А. А. Игнатьева*

Саратов
Издательство Саратовского университета
2012

УДК 531 (076.5)
ББК 22.3я73
Ф50

Составитель *С. В. Овчинников*

Физический практикум. Механика. Собственные колебания
Ф50 **механической системы с одной степенью свободы** : учеб.-метод. пособие для студентов физического и других естественных факультетов / сост. С. В. Овчинников ; под ред. проф. А. А. Игнатьева. – Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2012. – 24 с. : ил.
ISBN 978-5-292-04137-5

Учебно-методическое пособие посвящено изучению собственных колебаний в механической системе с одной степенью свободы. В нём представлены теория собственных колебаний на примере пружинного маятника, описание лабораторной установки, методики проведения практических заданий и обработки результатов экспериментов, контрольные вопросы и список рекомендуемой литературы. Предлагаются два упражнения по определению жесткости пружины и упражнение по определению параметров затухающих колебаний.

Для студентов физического и других естественных факультетов.

Рекомендуют к печати :

кафедра общей физики,
базовая кафедра физики критических
и специальных технологий
Саратовского государственного университета
доктор технических наук *А. В. Ляшенко*
(Саратовский государственный университет),
кандидат физико-математических наук *В. Н. Шевцов*
(Саратовский государственный университет)

УДК 531 (076.5)
ББК 22.3я73

ISBN 978-5-292-04137-5

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

ИЗУЧЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ НА ПРИМЕРЕ ПРУЖИННОГО МАЯТНИКА

В настоящем пособии изложена краткая теория собственных механических колебаний системы с одной степенью свободы. Предложены к выполнению экспериментальные упражнения, в которых проводятся измерения и определяются коэффициент жесткости пружины, логарифмический декремент затухания и добротность пружинного маятника.

Изложенные ниже теоретические замечания могут быть использованы как дополнительный материал к разделу «Механика» курса «Физика» («Общая физика»).

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Колебаниями или *колебательными процессами называются процессы, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени*.

По своей природе колебания весьма разнообразны: колебания маятников, колебания силы тока в цепи переменного тока, колебательное движение поршней в двигателе внутреннего сгорания, колебательное движение сердечной мышцы, наконец, сезонные колебания температуры местности.

Колебательные процессы, происходящие в механических системах, называются механическими колебаниями. В случае механических систем колебательным процессом является механическое движение, представляющее собой повторяющиеся смещения материальной точки (механического тела, элемента той или иной среды) относительно некоторого положения, называемого положением равновесия.

Колебания называются *периодическими*, если значения физического параметра, изменяющегося в процессе колебания, повторяются через равные промежутки времени и описываются периодической во времени функцией:

$$\xi(t)=\xi(t+T),$$

где ξ – значение физической величины, испытывающей колебательные изменения; t – текущее время; T – период колебаний, т. е. наименьший промежуток времени, через который повторяются значения физического параметра ξ.

Если функция ξ представляет собой гармоническую функцию (т. е. sin или cos), то такие периодические колебания называются *гармоническими.* Это кинематическое определение гармонических колебаний.

По характеру физических причин, благодаря которым происходят колебания, различают три основных вида колебательных процессов:

– ***собственные*** (или ***свободные***) ***колебания***, происходящие в системе, *не* подверженной действию *внешних переменных* сил, и возникающие после того как эта система кратковременным внешним воздействием была выведена из положения *устойчивого* равновесия (например, колебания грузика на пружинке – пружинный маятник, или грузика на нитке – математический маятник, когда в качестве внешнего воздействия выступает начальная деформация пружинки или начальное отклонение грузика от вертикали);

– ***вынужденные колебания***, которые происходят в системе, подверженной воздействию *внешней периодической силы* (например, колебания силы тока в электрической цепи);

– ***автоколебания***, когда колеблющаяся система сама задает моменты времени, в которые на колеблющуюся систему осуществляются воздействия, поддерживающие колебательный процесс. Примером автоколебательной системы являются механические часы, в которых часовой маятник в определенные моменты времени толкается специальным устройством за счет энергии закрученной пружины. Другим примером автоколебаний является движение поршней в двигателе внутреннего сгорания.

Поскольку число степеней свободы механической системы определяется минимальным числом независимых координат, необходимых для однозначного определения положения системы в пространстве в данный момент времени, то механическая система с одной степенью свободы может представлять из себя только твердое механическое тело, совершающее либо поступательное движение по прямой, либо осуществляющее элементы вращательного движения вокруг неподвижной оси. Следовательно, к простейшим системам, могущим совершать свободные колебания с одной степенью свободы, мы можем отнести следующие механические системы: физический маятник (частный случай – математический маятник), крутильный маятник и пружинный маятник.

Рассмотрим собственные колебания пружинного маятника, происходящие вдоль одной оси.

Собственные гармонические колебания пружинного маятника

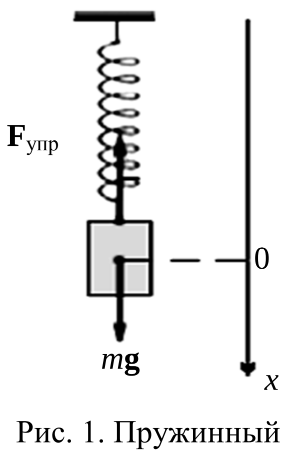

Рис. 1. Пружинный маятник

Пусть пружина с пренебрежимо малой массой, длиной ℓ в недеформированном состоянии и жесткостью k закреплена верхним концом на вертикальном подвесе (рис. 1). Если к нижнему концу пружины прикрепить грузик (материальную точку) с массой m, то пружина за счет силы тяжести, действующей на грузик, деформируется и растянется в соответствии с законом Гука на величину $\Delta\ell = mg/k$, где g – ускорение свободного падения.

Направим координатную ось $0x$ по направлению силы тяжести вдоль оси пружины, и координату грузика, находящегося в состоянии устойчивого равновесия, положим равной нулю (см. рис. 1).

Грузик находится в состоянии равновесия, поскольку результирующая сила, действующая на него, равна нулю: $m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{\text{упр}} = 0$ или в проекции на ось $0x$ $mg - k\Delta\ell = 0$. Кратковременным внешним воздействием выведем грузик из положения равновесия, растянув (или сжав) пружину. Теперь упругая сила, действующая на грузик, станет отличной от величины mg, и при снятии внешнего воздействия грузик начнет двигаться в соответствии со вторым законом Ньютона:

$$ma = mg - k\Delta\ell - kx(t)$$

или, с учетом $mg - k\Delta\ell = 0$,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx(t), \tag{1}$$

где $x(t)$ – смещение грузика относительно положения его равновесия.

В выражении (1) $a = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ – ускорение грузика, t – текущее время, отсчитываемое с момента снятия внешнего воздействия. Знак «минус» перед величиной $kx(t)$ означает, что упругая сила, действующая на грузик, все время направлена к положению его равновесия: при положительных x сила упругости направлена против направления оси $0x$, при отрицательных x – по направлению оси $0x$.

Особо подчеркнем, что выражение (1) записано для случая, когда в системе грузик–пружинка действует только одна неуравновешенная потенциальная сила: упругая внутренняя сила. Силы сопротивления движению грузика пока во внимание не принимаются.

Кроме того, так как сила тяжести, действующая на грузик, скомпенсирована упругой силой, соответствующей статической деформации пружины, то *величина силы тяжести не оказывает никакого влияния на характер рассматриваемого колебательного процесса*.

Тогда можно утверждать, что полная энергия системы грузик–пружинка, определяемая начальным внешним воздействием, будет оставаться постоянной. Полная энергия $E_{\text{полн}}$ пружинного маятника состоит из потенциальной энергии $E_{\text{п}}$ упругой деформации пружины и кинетической энергии $E_{\text{к}}$ грузика. Поэтому

$$E_{\text{полн}} = E_{\text{п}} + E_{\text{к}} = \frac{1}{2}kx^2(t) + \frac{1}{2}mu^2(t) = \text{const}, \tag{2}$$

где $u = \dfrac{dx}{dt}$ – скорость грузика.

Собственные колебания грузика, подвешенного к пружине, происходят из-за постоянного преобразования энергии упругой деформации пружины в кинетическую энергию грузика и наоборот. В состоянии максимального отклонения грузика от положения равновесия (пружина либо максимально растянута, либо максимально сжата) потенциальная энергия максимальна, а кинетическая энергия равна нулю, так как скорость грузика в момент изменения направления движения на противоположное равна нулю. Поскольку любая система, предоставленная самой себе, стремится перейти в состояние с минимальной потенциальной энергией, то потенциальная энергия упругой деформации в нашей системе начинает расходоваться на работу упругой силы по возвращению грузика в положение равновесия. Это приводит к росту скорости грузика, который при прохождении состояния равновесия ($x(t) = 0$ и $E_{\text{п}} = 0$) имеет максимальную скорость, максимальную кинетическую энергию, и, очевидно, это положение проскакивает. Далее кинетическая энергия грузика расходуется на работу по растяжению (или сжатию) пружины, растет потенциальная энергия системы, достигая максимального значения при максимальной деформации пружины, и такой процесс при отсутствии сил сопротивления теоретически будет повторяться сколь угодно долго.

Вернемся к уравнению (1). Обычно его записывают в следующем виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0, \tag{3}$$

где введено обозначение:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \cdot \tag{4}$$

Из теории дифференциальных уравнений известно, что решение уравнения (3) имеет вид: $x(t) = A\cdot\cos(\omega_0 t) + B\cdot\sin(\omega_0 t)$, где A и B – постоянные интегрирования. Последнее выражение нетрудно преобразовать к другому виду:

$$x(t) = x_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi), \tag{5}$$

где x_{max} – *амплитуда*, а $\omega_0 t + \varphi$ – *фаза* колебаний. Фаза колебаний измеряется в радианах (является безразмерной величиной). Параметр φ называется *начальной фазой*.

Прямой подстановкой выражения (5) в уравнение (3) можно убедиться в его справедливости.

Выражение (5) можно представить еще в одной форме:

$$x(t) = x_{max}\sin(\omega_0 t + \beta).$$

где β – начальная фаза для данного представления колебательного процесса.

Очевидно, что оба приведенных выражения фактически эквивалентны, так как для того, чтобы из функции cos получить функцию sin при равных амплитудах и аргументах достаточно сдвинуть cos вправо относительно sin на $\pi/2$.

Выражение (5) представляет собой гармоническую функцию времени. Поэтому исходное дифференциальное уравнение (3) называют *уравнением гармонических колебаний*. Поскольку уравнение (3) есть преобразованное уравнение движения (2) грузика, в котором действующая на грузик возвращающая сила прямо пропорциональна смещению грузика из положения равновесия, можно сделать следующее важное утверждение (динамическое определение свободных гармонических колебаний): *для того чтобы свободные колебания совершались по гармоническому закону, необходимо, чтобы сила, стремящаяся возвратить тело в положение равновесия, была пропорциональна смещению тела из положения равновесия и направлена в сторону, противоположную смещению.*

Величина ω_0 получила название *собственной круговой частоты* колебаний. Действительно, если T – период колебаний, то

$$\cos(\omega_0 t + \varphi) = \cos(\omega_0(t + T) + \varphi) = \cos(\omega_0 t + \varphi + 2\pi).$$

Поэтому

$$\omega_0 t + \omega_0 T = \omega_0 t + 2\pi,$$

откуда

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu, \qquad (6)$$

где $\nu = 1/T$ – частота колебаний, измеряемая в герцах (Гц). Следовательно, для пружинного маятника с учетом формулы (4) можно записать:

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (7)$$

– период свободных гармонических колебаний пружинного маятника определяется только массой грузика и жесткостью пружины.

Скорость грузика при гармонических колебаниях определяется дифференцированием выражения (5) по времени:

$$u(t) = \frac{dx}{dt} = -x_{max}\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi). \qquad (8)$$

Аналогично определяется и ускорение грузика:

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt} = -x_{max}\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x(t). \qquad (9)$$

Еще раз обратим внимание на то, что физические свойства колебательной системы (в нашем случае k и m) *определяют только собственную частоту колебаний* ω_0 *или период* T. Такие параметры колебательного процесса, как амплитуда x_{max} и начальная фаза φ, зависят от способа, с помощью которого система была выведена из состояния равновесия в начальный момент времени.

Из состояния равновесия систему грузик–пружина можно вывести двумя способами (оба эти способа могут быть реализованы одновременно):

– растянуть или сжать пружину на величину x_0, а потом в момент времени $t = 0$ отпустить грузик без начальной скорости;

– сообщить грузику в момент времени $t = 0$ с помощью резкого толчка начальную скорость u_0.

Величины x_0 и u_0 должны быть заданы наперед, и мы полагаем их алгебраическими относительно выбранной нами координатной системы. Так, если толчок грузика произведен по направлению оси $0x$, то величина u_0 будет положительной, а если против, то отрицательной. Задание величин x_0 и u_0 называется *заданием начальных условий*.

Так как формулы (5) и (8) выполняются и для начального момента времени, то можно записать следующие выражения для начальных условий:

$$x(t = 0) = x_0 = x_{max}\cos(\varphi) \text{ или } \frac{x_0}{x_{max}} = \cos(\varphi);$$

$$u(t = 0) = u_0 = -x_{max}\omega_0 \sin(\varphi) \text{ или } -\frac{u_0}{x_{max}\omega_0} = \sin(\varphi).$$

Разделив второе уравнение на первое, получим:

$$\mathrm{tg}(\varphi) = -\frac{u_0}{x_0\omega_0}. \qquad (10)$$

Возводя оба исходных уравнения в квадрат и складывая их, будем иметь:

$$\left(\frac{x_0}{x_{max}}\right)^2 + \left(\frac{u_0}{x_{max}\omega_0}\right)^2 = 1,$$

откуда

$$x_{max} = \sqrt{x_0^2 + \frac{u_0^2}{\omega_0^2}}. \qquad (11)$$

Таким образом, мы определили начальную фазу и амплитуду свободных гармонических колебаний. Из выражения (11) видно, что если $u_0 = 0$, то $x_{max} = x_0$.

Соотношения (5), (8), (9)–(11) *применимы к любым системам, совершающим свободные гармонические колебания с одной степенью свободы.* При этом, конечно, необходимо определить сущность величины $x(t)$, испытывающей колебательные изменения.

Графики временных зависимостей координаты материальной точки, ее скорости и ускорения при гармонических колебаниях с нулевой начальной фазой показаны на рис. 2.

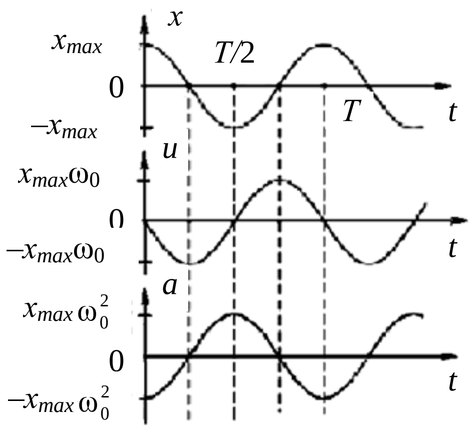

Рис. 2. Графики координаты $x(t)$, скорости $u(t)$ и ускорения $a(t)$ материальной точки, совершающей гармонические колебания

Представленные кривые соответствуют случаю, когда в начальный момент времени пружина растянута и грузик смещен из положения равновесия на расстояние x_0, а потом отпущен без начальной скорости. Поэтому $x_{max} = x_0$. Полная энергия, сообщенная пружинному маятнику в результате внешнего воздействия, очевидно, равна $E_{\text{полн}} = \frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}mu_0^2$. Так как из формулы (11) следует, что $u_0^2 = \omega_0^2 (x_{max}^2 - x_0^2)$, то с учетом (4) $E_{\text{полн}} = \frac{1}{2}kx_{max}^2$.

Задание: используя выражения (4), (5) и (8), доказать, что при свободных гармонических колебаниях полная энергия пружинного маятника не меняется во времени, т. е. для любого момента времени t выполняется равенство $\frac{1}{2}kx^2(t) + \frac{1}{2}mu^2(t) = \text{const} = \frac{1}{2}kx_{max}^2$.

В момент прохождения положения равновесия грузик имеет максимальную скорость, как это следует из формулы (8),

$$|\,u_{max}\,| = x_{max}\omega_0.$$

Поэтому максимальная кинетическая энергия грузика определяется величиной

$$E_{\text{к}max} = \frac{1}{2}mu_{max}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_{max}^2. \tag{12}$$

Очевидно, что в этот момент деформация пружины отсутствует и потенциальная энергия упругой деформации пружины равна нулю. Следовательно, $E_{\text{к}max} = E_{\text{полн}}$ и $\frac{1}{2}m\omega_0^2 x_{max}^2 = \frac{1}{2}kx_{max}^2$.

Учёт массы пружины

Если масса пружины $m_{\text{пр}}$ сравнима с массой грузика m, то нижние витки пружины сами выступают в роли своеобразных грузиков для верхних витков, и выражения (4) и (7) уже нельзя использовать для определения собственной круговой частоты и периода колебаний, так как ранее предполагалось, что масса пружины пренебрежимо мала.

Закон сохранения энергии при собственных гармонических колебаниях дает возможность определить собственную частоту (и период) колебаний пружинного маятника и в этом случае.

Пусть пружина имеет N одинаковых витков и длину ℓ в недеформированном состоянии. Масса одного витка пружины $m_в = m_{пр}/N$. Массу грузика, прикрепленного к пружинке, как и ранее, обозначим через m.

Пусть грузик совершает гармонические колебания с круговой частотой ω_0 и амплитудой x_{max}. Представим пружину в виде набора из N одинаковых колечек и пронумеруем витки пружины (i = 1, 2,…, N), начиная отсчёт от точки подвеса. Все витки пружины колеблются около своих положений равновесия совершенно синхронно. Но амплитуды колебаний витков различны. Самый нижний виток колеблется с максимальной амплитудой, равной амплитуде колебаний грузика, а самый верхний виток колеблется с наименьшей амплитудой. Считая величины амплитуд колебаний витков возрастающими прямо пропорционально номерам колец (витков пружины), определим амплитуду колебаний i-го кольца величиной

$$A_i = i \cdot \frac{x_{max}}{N}.$$

Максимальную кинетическую энергию i-го витка пружины, когда виток проходит положение своего равновесия, рассчитаем по формуле (12):

$$E_{к\,i\,max} = \frac{1}{2} m_в \omega_0^2 A_i = \frac{m_{пр}}{2N} \omega_0^2 \cdot \left(i \cdot \frac{x_{max}}{N} \right)^2.$$

Следовательно, кинетическая энергия всех витков пружины, когда грузик проходит положение равновесия, определяется выражением:

$$E_{к\,в\,max} = \sum_{i=1}^{N} E_{к\,i\,max} = \frac{m_{пр}\,\omega_0^2\,x_{max}^2}{2N^3} \sum_{i=1}^{N} i^2 = \frac{m_{пр}\,\omega_0^2\,x_{max}^2}{2N^3} \cdot \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$

Таким образом, полная энергия системы грузик–пружина, с одной стороны, равна ее максимальной кинетической энергии, состоящей из кинетических энергий витков и грузика, а с другой стороны – максимальной энергии упругой деформации, достигаемой в момент полного растяжения пружины, т. е.

$$\frac{1}{2} m\,\omega_0^2\,x_{max}^2 + \frac{m_{пр}\,\omega_0^2\,x_{max}^2}{2N^3} \cdot \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} = \frac{1}{2} k\,x_{max}^2.$$

Отсюда получаем более точное, чем (4), выражение для собственной круговой частоты колебаний:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m + \dfrac{m_{\text{пр}} N(N+1)(2N+1)}{6N^3}}. \qquad (13)$$

Для $N >> 1$

$$\frac{N(N+1)(2N+1)}{6N^3} = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{N}\right)\left(2 + \frac{1}{N}\right)_{N>>1} \approx \frac{1}{3}.$$

Поэтому формулу (13) можно переписать в более простом виде:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m + \dfrac{m_{\text{пр}}}{3}}. \qquad (14)$$

Затухающие свободные колебания пружинного маятника

В реальных условиях всегда существуют силы трения, препятствующие движению грузика при его колебательном движении. Энергия, запасенная маятником за счет начального внешнего воздействия, будет расходоваться на работу против сил трения, амплитуда колебательного движения будет уменьшаться и в итоге колебательный процесс прекратится, а вся запасенная маятником механическая энергия перейдет в тепловую. Скорость затухания колебаний будет определяться величиной сил трения.

Силы трения довольно сложно зависят от скорости, но при колебаниях грузика, когда его скорость по абсолютной величине невелика, можно с достаточной степенью точности считать, что силы трения пропорциональны скорости движения. Поэтому чтобы учесть действие сил трения на собственные колебания грузика, уравнение (1) движения грузика необходимо дополнить значением силы трения и записать это уравнение в виде:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx(t) - h\frac{dx}{dt}, \qquad (15)$$

где h – коэффициент силы трения (постоянная величина); $h\dfrac{dx}{dt}$ – величина силы трения. Знак «минус» перед величиной силы трения в уравнении (15) отражает тот факт, что сила трения всегда направлена против движения.

При изучении затухающих колебаний уравнение (15) записывают в преобразованном виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x(t) = 0, \qquad (16)$$

где, как и ранее, $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ – собственная круговая частота колебательной системы, а параметр $2\beta = \dfrac{h}{m}$ характеризует быстроту затухания колебаний во времени. Числовой множитель «2» в этом параметре в теории дифференциальных уравнений вводится для удобства решения. Часто параметр β называют *коэффициентом затухания*. Размерность β равна $с^{-1}$.

Если силы трения не слишком большие и выполняется условие $\beta < \omega_0$, то решение уравнения (16) имеет вид

$$x(t) = x_{max} \exp(-\beta t)\cos(\omega t + \varphi), \tag{17}$$

где величина x_{max} и начальная фаза φ определяются из начальных условий, а круговая частота ω затухающих колебаний связана с собственной круговой частотой системы и коэффициентом затухания выражением

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{h^2}{4m^2}}. \tag{18}$$

Величина $T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$ называется *условным периодом* затухающих колебаний, так как временная зависимость (17) не является периодической функцией, но содержит функциональный периодический множитель $\cos(\omega t + \varphi)$, имеющий период T_1.

Значение $A(t) = x_{max}\exp(-\beta t)$ иногда называют амплитудой затухающих колебаний.

Из выражения (18) ясно, что, если условие $\beta < \omega_0$ не выполняется, то движение грузика не будет иметь вид колебательного процесса, так как величина ω станет мнимой.

Скорость движения грузика вычислим дифференцированием выражения (17) по времени:

$$u = \frac{dx}{dt} = -x_{max} \cdot \exp(-\beta t)\left[\beta \cdot \cos(\omega t + \varphi) + \omega \cdot \sin(\omega t + \varphi)\right]. \tag{19}$$

Начальные условия, как и в случае гармонических колебаний, состоят в задании в момент времени $t = 0$ начального смещения грузика x_0 из положения равновесия и начальной скорости u_0 грузика. Тогда

$$\begin{gathered} x_0 = x\big|_{t=0} = x_{max}\cos(\varphi), \\ u_0 = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = -x_{max}\left(\beta \cdot \cos(\varphi) + \omega \cdot \sin(\varphi)\right). \end{gathered} \tag{20}$$

Решив систему (20) относительно φ и x_{max}, мы полностью определим параметры колебательного процесса.

Разделив второе уравнение системы (20) на первое, получим:

$$\mathrm{tg}(\varphi) = \frac{u_0}{\omega x_0} - \frac{\beta}{\omega}. \qquad (21)$$

Известно, что $1 + \mathrm{tg}^2(\varphi) = 1/\cos^2(\varphi)$. Поэтому

$$x_{max} = \frac{x_0}{\cos(\varphi)} = x_0\sqrt{1+\mathrm{tg}^2(\varphi)} = x_0\sqrt{1+\left(\frac{u_0}{\omega x_0} - \frac{\beta}{\omega}\right)^2}. \qquad (22)$$

Выражения (17), (21) и (22) полностью определяют параметры собственных затухающих колебаний пружинного маятника.

График, отражающий изменение координаты колеблющегося грузика (материальной точки) во времени при затухающих колебаниях, приведен на рис. 3, откуда видно, что колебания с течением времени постепенно ослабевают, и огибающая графика колебаний не выходит за пределы кривых $\pm x_{max} \cdot \exp(-\beta t)$.

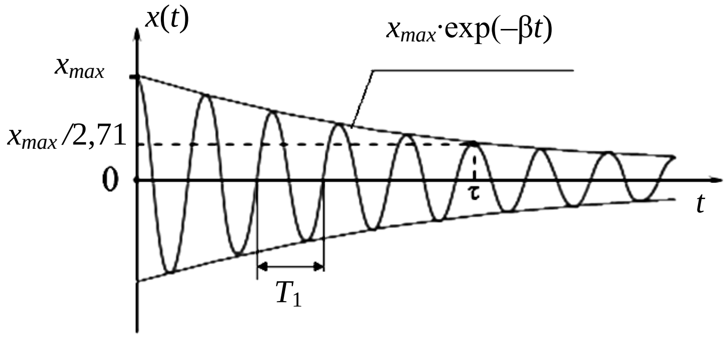

Рис. 3. Затухающие колебания системы
с одной степенью свободы

Быстрота стремления функции exp(–βt) к нулю зависит от β, т. е. от величины сил трения. Интервал времени τ = 1/β, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в $e \approx 2{,}718$ раз, называется *характерным временем затухания*.

Коэффициент затухания β и характерное время затухания τ сами по себе не характеризуют колебательную систему. В зависимости от условного периода колебаний T_1 за одно и то же время τ разные системы совершают разное число колебаний. Поэтому для оценки быстроты затухания колебаний в зависимости от их числа пользуются так называемым *логарифмическим декрементом затухания* θ:

$$\theta = \frac{T_1}{\tau} = \beta T_1. \qquad (23)$$

По его значению можно определить, сколько колебаний должно пройти, чтобы их размах уменьшился в определенное число раз.

Действительно, пусть в момент времени t отклонение маятника от положения равновесия было равно x_1, а отклонение через условный период колебаний (т. е. в момент времени $t+T_1$) было равно x_2. Тогда

$$x_1 = x_{max}\exp(-\beta t)\cos(\omega t + \varphi),$$

$$x_2 = x_{max}\exp(-\beta(t + T_1))\cos(\omega(t + T_1) + \varphi) = x_1\exp(-\beta T_1),$$

так как $\cos(\omega t+\varphi) = \cos(\omega(t+T_1)+\varphi)$.

Отсюда

$$\frac{x_2}{x_1} = \exp(-\beta T_1) = \exp(-\theta)$$

и $\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \theta$ – величина θ показывает, во сколько раз изменился натуральный логарифм размаха колебаний за один условный период, т. е. логарифм размаха двух последовательных отклонений в одну сторону.

Если рассматривать отношение размаха колебаний за промежуток времени, составляющий N условных периодов ($t = NT_1$), то, принимая во внимание, что

$$x(t+NT_1) = x_N = x_{max}\exp(-\beta(t+NT_1))\cos(\omega(t+NT_1)+\varphi) = x_1\exp(-\beta NT_1),$$

получим $\ln\left(\frac{x_1}{x_N}\right) = N\cdot\theta$ или

$$\theta = \frac{1}{N}\ln\left(\frac{x_1}{x_N}\right) = \frac{T_1}{t}\ln\left(\frac{x_1}{x_N}\right). \qquad (24)$$

На этой основе в теории колебаний вводится величина $N_e = 1/\theta$, показывающая число колебаний, за которые размах колебаний уменьшится в $e \approx 2{,}718$ раз:

$$\frac{x_1}{x_N} = e.$$

Важной характеристикой колебательной системы, совершающей свободные затухающие колебания, является *добротность* Ω:

$$\Omega = \frac{\pi}{\theta} = \frac{\pi}{\beta T_1} = \pi\frac{\tau}{T_1} = \pi\cdot N_e. \qquad (25)$$

Понятие добротности имеет глубокий энергетический смысл. Можно показать (см. Приложение), что в случае $\beta << \omega_0$ добротность колебательной системы определяется следующим энергетическим соотношением:

$$\Omega = 2\pi \frac{E_{\text{полн}}(t)}{\Delta E}, \tag{26}$$

где $E_{\text{полн}}(t)$ – полная энергия колебательной системы к началу очередного периода колебаний, ΔE – расход энергии за один условный период на работу против сил трения. Таким образом, величина, обратная добротности, характеризует относительную убыль энергии колебательной системы из-за наличия трения на интервале времени, равном одному условному периоду колебаний. Чем меньше силы трения, действующие в колебательной системе, тем выше добротность этой системы. Понятно, что добротность колебательной системы, совершающей собственные гармонические колебания, равна бесконечности.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Принадлежности: лабораторная установка (рис. 4), набор пружин, набор грузиков, секундомер.

При выполнении настоящей лабораторной работы необходимо провести:

1) измерение коэффициента жёсткости пружины статическим методом;

2) измерение коэффициента жёсткости пружины динамическим методом;

3) определение логарифмического декремента затухания пружинного маятника и добротности данной колебательной системы.

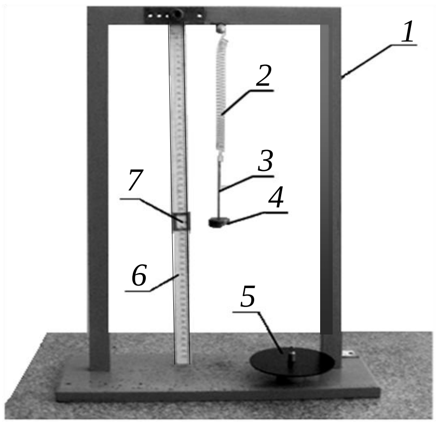

Рис. 4. Внешний вид лабораторной установки

Лабораторная установка представляет собой деревянный П-образный штатив *1*, на котором закрепляется пружина *2*. Снизу к пружине прикрепляется держатель *3*, предназначенный для удержания грузиков *4* с различными массами. Грузик *5* с дискообразной пластинкой предназначен для исследования затухающих колебаний. Линейная шкала *6* служит для определения смещения грузика. На линейной шкале имеется подвижный указатель *7*, с помощью которого определяется точка начала отсчета по координатной оси $0x$.

Упражнение 1. Определение коэффициента жесткости пружины статическим методом

Порядок выполнения упражнения

1. Определить массы используемых грузиков (5 грузиков).
2. Закрепить на штативе пружину с прикрепленным к ней держателем грузиков. С помощью указателя *7* по положению основания держателя зафиксировать на шкале *6* положение равновесия $x_\text{р}$ системы пружина–держатель. Значение $x_\text{р}$ принимается за начало отсчета.
3. Нагрузить держатель грузиком известной массы m и определить по шкале *6* новое положение x основания держателя.
4. Рассчитать значение коэффициента жесткости пружины по формуле закона Гука: $k = \dfrac{mg}{\left|x - x_\text{р}\right|}$.
5. Проделать операции, указанные в пунктах 2 и 3, для пяти грузиков с различными массами.
6. Измерения провести для трех пружин с различными коэффициентами жёсткости.
7. Данные прямых измерений и вычислений свести в табл. 1.

Таблица 1

№ пружины	№ опыта	$x_\text{р}$, см	m, г	x, см	$\left\|x - x_\text{р}\right\|$, см	k, дин/см	$\langle k\rangle$, дин/см	$\Delta k = \left\|k - \langle k\rangle\right\|$, дин/см	$\langle \Delta k\rangle$, дин/см
1	1								
	2								
	3								
	4								
	5								
2	1								
	2								
	3								
	4								
	5								
3	1								
	2								
	3								
	4								
	5								

Примечание. Обозначение $\langle k\rangle$ выражает среднее значение величины k, вычисленное для конкретной пружины по пяти опытам. Аналогично, $\langle \Delta k\rangle$ есть среднее значение разбросов Δk.

8. Построить по данным, приведенным в табл. 1, график зависимости удлинения (x–$x_р$) пружины от нагрузки mg для каждой пружины.

9. Определить по построенным графикам для каждой пружины область выполнения закона Гука (область линейной зависимости ($x - x_р$) от mg). Тангенс угла наклона прямолинейного участка графика к оси абсцисс численно равен коэффициенту жесткости соответствующей пружины. Рассчитать коэффициенты жесткости пружин по углам наклона прямолинейных участков графиков и сравнить с соответствующими значениями $\langle k \rangle$ из табл. 1.

10. Рассчитать максимальную относительную ошибку метода по формуле

$$\varepsilon_{max} = \frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta x + \Delta x_р}{\left| x - x_р \right|},$$

где Δm – погрешность определения массы грузика, Δg – погрешность определения величины ускорения свободного падения, Δx – погрешность определения по линейной шкале положения основания нагруженного держателя, $\Delta x_р$ – погрешность определения по линейной шкале положения равновесия ненагруженного держателя. Значение ошибки ε_{max} сравнить с соответствующим значением $\varepsilon_{опыт} = \frac{\langle \Delta k \rangle}{\langle k \rangle}$, полученным по данным, приведённым в табл. 1. Эксперимент считается выполненным корректно, если $\varepsilon_{опыт} \le \varepsilon_{max}$.

Упражнение 2. Определение коэффициента жесткости пружины динамическим методом

Порядок выполнения упражнения

1. Определить массу $m_д$ держателя *7*.
2. Закрепить на штативе пружину с прикрепленным к ней держателем грузиков.
3. Нагрузить держатель грузиком *4* известной массы m.
4. Вывести маятник из положения равновесия путем растяжения пружины не более чем на 10% ее первоначальной длины (растяжение пружины осуществлять, действуя на нижнюю часть держателя *7*) и предоставить маятнику возможность совершать вертикальные колебания.
5. Измерить с помощью секундомера время t N полных последовательных колебаний маятника (N = 30…50).
6. Вычислить период колебаний маятника: $T = t / N$.
7. Рассчитать с помощью выражения (7) коэффициент жёсткости пружины, не забывая учитывать массу держателя:

$$k = \frac{4\pi^2}{T^2}(m + m_д).$$

8. Проделать операции, указанные в пунктах 2–7 для пяти грузиков с различными массами.

9. Провести измерения для трех пружин с различными коэффициентами жёсткости, уже использованных в упражнении 1.

10. Результаты прямых измерений и вычислений свести в табл. 2.

Таблица 2

№ пружины	№ опыта	$m_д + m$, г	t, с	N	T, с	k, дин/см	$\langle k \rangle$, дин/см	$\Delta k = \lvert k - \langle k \rangle \rvert$, дин/см	$\langle \Delta k \rangle$, дин/см
	1								
	2								
1	3								
	4								
	5								
	1								
	2								
2	3								
	4								
	5								
	1								
	2								
3	3								
	4								
	5								

11. Значения $\langle k \rangle$ и $\langle \Delta k \rangle$ для каждой пружины, полученные статическим и динамическим методами, свести в табл. 3 и объяснить возможные расхождения этих значений.

Таблица 3

№ пружины	Методы			
	статический		динамический	
	$\langle k \rangle$, г/с^2	$\langle \Delta k \rangle$, дин/см	$\langle k \rangle$, дин/см	$\langle \Delta k \rangle$, дин/см
1				
2				
3				

12. По данным, приведённым в табл. 3, выбрать пружину, для которой расхождение в величине $\langle k \rangle$, определенной статическим и динамическим методами, наибольшее. Определить с помощью аналитических весов массу пружины $m_{\text{ПР}}$ и, используя данные, приведённые в табл. 2, и выражение (14), пересчитать значение коэффициента жёсткости данной пружины с учётом ее массы:

$$k = \frac{4\pi^2}{T^2}(m + m_{\text{д}} + \frac{m_{\text{пр}}}{3}).$$

Сравнить это значение k со значением $\langle k \rangle$, полученным статическим методом.

Упражнение 3. Определение логарифмического декремента затухания и добротности пружинного маятника

Порядок выполнения упражнения
(*упражнение выполняется с одной пружиной*)

1. Закрепить пружину на П-образном штативе и прикрепить к нижнему концу пружины грузик с дискообразной пластиной (рис. 5). Держатель грузиков в данном упражнении не используется.

2. Отметить с помощью указателя *7* положение равновесия груза $x_{\text{р}}$, основываясь на положение кромки дискообразной пластины. Значение $x_{\text{р}}$ принимается за начало отсчета.

3. Растянуть пружину, взявшись рукой за нижнюю часть груза, не более чем на 20% первоначальной длины пружины. Отпустить маятник, одновременно включив секундомер.

4. Измерить с помощью секундомера время t_1 полных N_1 ($N_1 = 30…50$) колебаний маятника и определить условный период колебаний $T_1 = t_1/N_1$.

Рис. 5. Пружинный маятник с грузиком, оказывающим заметное сопротивление движению, для исследования затухающих колебаний

5. Повторить действия пункта 3, зафиксировав по линейной шкале максимальное отклонение груза x_{max} от положения равновесия, основываясь на положение кромки дискообразной пластины, и отпустить маятник, одновременно включив секундомер.

6. Следить за амплитудой затухающих колебаний и определить по секундомеру время t, за которое амплитуда колебаний уменьшится в два раза, т. е. станет равной $x_{max}/2$.

7. Предполагая, что во времени t укладывается N полных колебаний, т. е. $N = t / T_1$, вычислить по формуле (24) логарифмический декремент затухания: $\theta = \frac{T_1}{t}\ln(2)$.

8. Вычислить по формуле (25) добротность Ω затухающих колебаний пружинного маятника, а затем с помощью формулы (26) определить долю энергии, теряемой маятником за один условный период колебаний:

$$\frac{\Delta E}{E_{\text{полн}}(t)} = \frac{2\pi}{\Omega}.$$

9. Провести операции, указанные в пунктах 3–8, не менее пяти раз. Результаты измерений и вычислений свести в табл. 4.

Таблица 4

№ опыта	t_1, с	N_1	T_1, с	$\langle T_1\rangle$, с	t, с	$\langle T_1\rangle/t$	θ	$\langle\theta\rangle$	$\langle\Omega\rangle$	$\langle\Delta E/E\rangle$
1										
2										
3										
4										
5										

Указания по технике безопасности

1. Надежно закреплять верхний конец пружины на штативе.
2. Запрещается раскачивать пружинный маятник на большие амплитуды.
3. Запрещается придавать пружинному маятнику боковые колебания.

Контрольные вопросы

1. Какие колебания называются собственными, а какие вынужденными?
2. При каких условиях совершаются собственные гармонические колебания?
3. Охарактеризуйте параметры собственных гармонических колебаний.
4. Как определить амплитуду и начальную фазу собственных гармонических колебаний?
5. От каких величин зависит период собственных гармонических колебаний пружинного маятника?
6. Докажите, что полная энергия собственных гармонических колебаний сохраняется во времени.
7. Как можно учесть массу пружины при определении круговой частоты собственных гармонических колебаний?
8. В чем состоят статический и динамический методы измерения коэффициента жёсткости пружины?
9. Сравните точности измерения коэффициента жёсткости пружины статическим и динамическим методами. Какой метод точнее?
10. Охарактеризуйте параметры собственных затухающих колебаний.

11. Что такое логарифмический декремент затухания и добротность колебательной системы?

12. Почему при затухающих собственных колебаниях уменьшается полная механическая энергия колебательной системы?

13. Почему при проведении измерений нельзя допускать заметных боковых колебаний пружинного маятника?

Список рекомендуемой литературы

Основная

1. *Сивухин, Д. В*. Общий курс физики : учеб. пособие : в 5 т. Т. 1. Механика / Д. В. Сивухин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 560 с.

2. *Стрелков, С. П.* Механика : учебник / С. П. Стрелков. – СПб.: Изд-во «Лань», 2005. – 560 с.

Дополнительная

Савельев, И. В. Курс общей физики : учеб. пособие для втузов : в 3 т. Т. 1. Механика. Молекулярная физика / И. В. Савельев. – СПб. ; М. ; Краснодар : Изд-во «Лань», 2008. – 432 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Полная энергия собственных затухающих колебаний пружинного маятника равна сумме мгновенных значений энергии упругой деформации пружины и кинетической энергии грузика:

$$E_{\text{полн}}(t) = \frac{1}{2}\left[kx^2(t) + mu^2(t)\right] = \frac{1}{2}x_{max}^2 \exp(-2\beta t) \times \\ \times \left\{k\cos^2(\omega t + \varphi) + m\left[\beta\cos(\omega t + \varphi) + \omega\sin(\omega t + \varphi)\right]^2\right\}. \quad (\text{П. } 1)$$

Для малых сил сопротивления при условии, что $\beta << \omega_0$, выражение (П. 1) значительно упрощается:

$$E_{\text{полн}}(t) = \frac{1}{2}kx_{max}^2 \exp(-2\beta t). \quad (\text{П. } 2)$$

Действительно, раскроем фигурную скобку в выражении (П. 1) с учетом формул (4) и (18):

$$k\cos^2(\omega t + \varphi) + m\left[\beta\cos(\omega t + \varphi) + \omega\sin(\omega t + \varphi)\right]^2 = \\ = k\cos^2(\omega t + \varphi) + m\beta^2\cos^2(\omega t + \varphi) + m\beta\omega\sin(2\omega t + 2\varphi) + \\ + m(\omega_0^2 - \beta^2)\sin^2(\omega t + \varphi) = \\ = k + m\beta^2\left[\cos^2(\omega t + \varphi) - \sin^2(\omega t + \varphi)\right] + m\beta\omega\sin(2\omega t + 2\varphi) = \\ = k\left.\left\{1 + \frac{\beta^2}{\omega_0^2}\left[\cos^2(\omega t + \varphi) - \sin^2(\omega t + \varphi)\right] + \frac{\beta\omega}{\omega_0^2}\sin(2\omega t + 2\varphi)\right\}\right|_{\beta << \omega_0} \approx k.$$

Здесь мы пренебрегаем величинами $\frac{\beta^2}{\omega_0^2}$ и $\frac{\beta\omega}{\omega_0^2}$ по сравнению с единицей, поскольку $\beta << \omega_0$, а значения синуса и косинуса не могут превышать по абсолютной величине единицу.

Убыль энергии колебаний за один условный период определим с помощью выражения (П. 2):

$$\Delta E = E_{\text{полн}}(t) - E_{\text{полн}}(t + T_1) = \frac{1}{2}kx_{max}\left[\exp(-2\beta t) - \exp\left(-2\beta(t + T_1)\right)\right] = \\ = \frac{1}{2}kx_{max}\exp(-2\beta t)\left[1 - \exp(-2\beta T_1)\right] = E_{\text{полн}}(t)\left[1 - \exp(-2\beta T_1)\right] \approx E_{\text{полн}}(t)\cdot 2\beta T_1,$$

поскольку для малых β $\exp(-2\beta T_1) \approx 1 - 2\beta T_1$.

Следовательно, учитывая определения добротности (25), имеем:

$$\frac{E_{\text{полн}}(t)}{\Delta E} = \frac{1}{2\beta T_1} = \frac{\Omega}{2\pi}.$$

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ФИЗИЧЕСКИЙ ПРАКТИКУМ
МЕХАНИКА
Собственные колебания
механической системы с одной степенью свободы

Учебно-методическое пособие
для студентов физического
и других естественных факультетов

Составитель
Овчинников Сергей Владимирович

Под редакцией профессора *А. А. Игнатьева*

Редактор *И. Ю. Бучко*
Технический редактор *В. В. Володина*
Корректор *Е. Б. Крылова*
Оригинал-макет подготовили *О. Г. Данке*, *Т. Н. Сиротинина*

Подписано в печать 09.08.2012. Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. 1,16 (1,25). Тираж 100. Заказ 40.

Издательство Саратовского университета.
410012, Саратов, Астраханская, 83.
Типография Издательства Саратовского университета.
410012, Саратов, Астраханская, 83.