УДК 517.518.2

Вложение классов функций обобщенной ограниченной вариации в классы функций с фрактальным графиком[1]

Д. И. Масютин (Екатеринбург, Россия)
newselin@mail.ru

Для непрерывной на отрезке вещественнозначной функции f вводится понятие модуля фрактальности $\nu(f, \varepsilon)$, сопоставляющего каждому $\varepsilon > 0$ минимальное число квадратов, со сторонами длины ε, параллельными осям координат, которыми можно покрыть график функции f. Для невозрастающей функции $\mu : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ рассматривается класс F^μ непрерывных на отрезке функций таких, что $\nu(f, \varepsilon) = O(\mu(\varepsilon))$. Описано соотношение классов F^{μ_1} и F^{μ_2} при различных μ_1 и μ_2. Установлена связь между классами F^μ и классами непрерывных функций ограниченной вариации $BV_\Phi[a, b] \cap C[a, b]$ для произвольных выпуклых функций Φ.

Ключевые слова: фрактальная размерность, обобщенная ограниченная вариация.

Embedding classes of functions of generalized bounded variation into classes of functions with a fractal graph[1]

D. I. Masyutin (Ekaterinburg, Russia)
newselin@mail.ru

For a real-valued function f continuous on a closed interval, its modulus of fractality $\nu(f, \varepsilon)$ is defined as the function that maps any $\varepsilon > 0$ to the smallest number of squares of size ε parallel to the coordinate axes that cover the graph of f. For a nonincreasing function $\mu : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, we consider the class F^μ of functions continuous on an interval such that $\nu(f, \varepsilon) = O(\mu(\varepsilon))$. The relation between the classes F^{μ_1} and F^{μ_2} is described for different μ_1 and μ_2. The connection is established between the classes F^μ and the classes of continuous functions of bounded variation $BV_\Phi[a, b] \cap C[a, b]$ for arbitrary convex functions Φ.

Keywords: fractal dimension, generalized bounded variation.

Пусть дана непрерывная функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Модулем фрактальности* функции f будем называть функцию $\nu(f) : (0, +\infty) \to \mathbb{N}$, которая любому $\varepsilon > 0$ сопоставляет минимальное число квадратов со сторонами длины ε, параллельными осям координат, которыми можно покрыть график функции f.

Пусть $\mu : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ — невозрастающая функция такая, что

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \mu(\varepsilon) = +\infty.$$

Определим класс F^μ следующим образом

$$F^\mu := \{f \in C[a,b] : \nu(f,\varepsilon) = O(\mu(\varepsilon))\}.$$

Естественно рассматривать функции μ такие, что

$$\frac{C_1}{\varepsilon} \leqslant \mu(\varepsilon) \leqslant \frac{C_2}{\varepsilon^2}, \quad C_1, C_2 > 0;$$

тогда соответствующие классы F^μ будут удовлетворять условию

$$F^{\frac{1}{\varepsilon}} \subset F^\mu \subset F^{\frac{1}{\varepsilon^2}}.$$

Нетрудно видеть, что если $\mu_1(\varepsilon) = O(\mu_2(\varepsilon))$ при $\varepsilon \to +0$, то $F^{\mu_1} \subset F^{\mu_2}$. Более того, если порядки стремления к $+\infty$ у функций μ_1 и μ_2 разные, то классы F^{μ_1} и F^{μ_2} не совпадают. Таким образом, имеет место

Теорема 5. *Пусть $\mu_1(\varepsilon) = o(\mu_2(\varepsilon))$ при $\varepsilon \to +0$. Функция μ_2 такая, что $\varepsilon\mu_2(\varepsilon)$ — невозрастающая, а $\varepsilon^2\mu_2(\varepsilon)$ — неубывающая. Тогда существует функция f, принадлежащая F^{μ_2}, но не принадлежащая F^{μ_1}.*

Следуя [1], непрерывную выпуклую вниз функцию $\Phi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ такую, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{\Phi(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to+\infty} \frac{\Phi(\varepsilon)}{\varepsilon} = +\infty,$$

будем называть *N-функцией*.

Рассмотрим разбиение τ отрезка $[a,b]$:

$$\tau = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = b\}.$$

Функцию f (см., например, [1, гл. 4, §5]) будем называть функцией с обобщенной ограниченной Φ-вариацией на отрезке $[a,b]$, если сумма

$$V_\Phi(f,\tau) = \sum_{k=1}^{n} \Phi\big(|f(t_k) - f(t_{k-1})|\big)$$

ограничена по всем разбиениям τ отрезка $[a,b]$. Класс таких функций будем обозначать $BV_\Phi[a,b]$.

В статье [3] изучена связь классов F^μ с классами $BV_\Phi[a,b]$ при $\mu(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^\alpha}$, $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$ и $\Phi(\varepsilon) = \varepsilon^p$, $p \geqslant 1$. В данной работе результаты, полученные в [3], обобщаются на произвольные классы F^μ и функции обобщенной ограниченной Φ-вариации. В частности, в терминах функций μ и Φ получено неулучшаемое условие вложения класса $BV_\Phi[a,b]$ в класс F^μ. А именно, справедливы следующие утверждения.

Теорема 6. *Пусть* Φ *—* N*-функция и* $\frac{\Phi^{-1}(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = O(\mu(\varepsilon))$ *при* $\varepsilon \to +0$. *Тогда*

$$BV_\Phi[a,b] \cap C[a,b] \subset F^\mu.$$

Теорема 7. *Пусть* Φ *—* N*-функция. При этом* $\mu(\varepsilon) = o\left(\frac{\Phi^{-1}(\varepsilon)}{\varepsilon^2}\right)$ *при* $\varepsilon \to +0$. *Тогда существует функция* f*, принадлежащая* $BV_\Phi[0,1] \cap C[0,1]$*, но не принадлежащая* F^μ.

При $\mu(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$ и $\Phi(\varepsilon) = \varepsilon$ справедливо $BV_\Phi[a,b] \cap C[a,b] = F^\mu$. Более того, верна

Теорема 8. *Для любой функции* $f \in C[a,b]$

$$\frac{1}{8} \cdot Vf \leqslant \sup_{0<\varepsilon<1} \varepsilon\nu(f,\varepsilon) \leqslant Vf + (b-a) + 1,$$

где Vf *— классическая ограниченная вариация функции* f.

В случае, когда $\varepsilon\mu(\varepsilon) \to +\infty$ при $\varepsilon \to +0$ классы F^μ "значительно шире" , чем классы BV_Φ.

Теорема 9. *Пусть* μ *удовлетворяет условию*

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \varepsilon\mu_2(\varepsilon) = +\infty.$$

и $\varepsilon\mu(\varepsilon)$ *— убывающая функция, а* $\varepsilon^2\mu(\varepsilon)$ *— возрастающая функция. Тогда для любой* N*-функции* Φ

$$F^\mu \not\subset BV_\Phi[0,1].$$

Доказательства теорем 5 - 9 изложены в [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича // М.: ГИМФЛ, 1958. 272 с.

[2] *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. // М.: ГИМФЛ, 1961. 937 с.

[3] *Гриднев М.Л.* О классах функций с ограничением на фрактальность их графиков // Proceedings of the 48th International Youth School-Conference “Modern Problems in Mathematics and its Applications”. – Екатеринбург, 2017. – С. 167–173.

[4] *Масютин Д.И.* О связи классов функций ограниченной вариации и классов функций с фрактальным графиком // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2023. Т. 29, № 4. С. 155-168.