$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k^p k^{p-2} \asymp \varphi_n^p, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$a_n \asymp n^{1/p-1}\varphi_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k \asymp n^{1/p}\varphi_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$E_n(f)_{V_p} \asymp n^{1/p}\varphi_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теоремы 3 и 4 обобщают некоторые результаты А. А. Конюшкова [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Терехин А. П.* Приближение функций ограниченной p-вариации // Изв. вузов. Матем. 1965. № 2. С. 171–187.

2. *Tikhonov S.* Trigonometric series with general monotone coefficients // J. Math. Anal. Appl. 2007. Vol. 326, № 2. P. 721–735.

3. *Конюшков А. А.* Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Матем. сб. 1958. Т. 44(86), № 1. С. 53–84.

УДК 517.984

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ МАКСИМУМА АФФИННО-КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИЙ[1]

И. Ю. Выгодчикова (Саратов, РФ)

VigodchikovaIY@info.sgu.ru, irinavigod@yandex.ru

1. Введение. В анализе динамических рядов встречаются случаи, когда уровень одного динамического ряда (обладающего доминантным признаком с точки зрения рассматриваемого показателя) превышает уровень другого в каждый момент наблюдения (показатели численности городского и сельского населения, оптовая и розничная цена товара, объём энергопотребления в одной квартире и во всём доме и проч.). Возникает вопрос об оценке динамики развития доминантного признака. Ответить на этот вопрос и получить ряд новых показателей для анализа подобных рядов позволяет инструмент, сводящийся к модели аппроксимации двузначного динамического ряда, представленной задачей негладкого анализа.

2. Постановка задачи. Пусть n — целое неотрицательное число, обозначающее степень алгебраического полинома $p_n(A,t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ с вектором коэффициентов $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in R^{n+1}$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 13-01-00175, № 16-06-00582).

Задана дискретная сетка из $N+1$ упорядоченных значений независимой переменной, $T = \{t_0 < \ldots < t_N\}$, $N \geq n+1$, в узлах которой определено многозначное отображение, $\Psi(\cdot)$, образом которого в каждом узле сетки является пара значений $\Psi(t_k) = \{y_{1,k}; y_{2,k}\}$, содержащая соответствующий данному узлу сетки уровень каждого из двух динамических рядов сопоставимых величин $y_{2,k}$ и $y_{1,k}$, так, что $y_{2,k} \geq y_{1,k}$, $k = \overline{0,N}$. Положим $y_2(t_k) = y_{2,k}$, $y_1(t_k) = y_{1,k}$, $k = \overline{0,N}$. Обозначим $c(A,t) = (p_n(A,t) - y_1(t))(p_n(A,t) - y_2(t))$, $t \in T$.

Рассмотрим задачу:

$$C(A) = \max_{t \in T} |c(A,t)| \longrightarrow \min_{A \in \mathbb{R}^{n+1}}. \tag{1}$$

Функция $c(\cdot,t)$ является аффинно-квадратичной функцией при каждом t, поэтому целевая функция задачи (1) вовсе не обязаны быть выпуклой. Задача (1) позволяет отыскать алгебраический полином, в каждом узле дискретной сетки приближающийся к одному из значений многозначного отображения, и таким образом представить в форме алгебраического полинома динамическую модель системы из двух компонент с доминантным признаком. С точки зрения модели (1), оценками y_k^+ и y_k^- уровней $y_{2,k}$ и $y_{1,k}$ двузначного ряда в каждом узле дискретной сетки T являются, соответственно, $y_k^+ = \max\{p_n(A,t_k), y_k - p_n(A,t_k)\}$ и $y_k^- = \min\{p_n(A,t_k), y_k - p_n(A,t_k)\}$, где $y_k = y_{1,k} + y_{2,k}$, $k = \overline{0,N}$, A — решение задачи (1).

3. Алгоритм решения. В [1] доказано существование и получены условия оптимальности для задачи (1). В [2] приведено обоснование аналога альтернансного явления в формулировке необходимого условия решения задачи (1) и установлен факт конечности множества решений. Рассмотрим алгоритмическую процедуру, позволяющую отыскать все решения задачи (1). Положим $C^* = \min_{A \in \mathbb{R}^{n+1}} C(A)$. Обозначим через Σ множество всех подмножеств сетки T вида $\sigma = \left\{t_{j_0} < \cdots < t_{j_{n+1}}\right\} \subset T$, называемых *базисами*. Пусть ξ и $\hat{\xi}$ — двоичные наборы из элементов -1 и 1 длины $n+2$ и $\xi \neq -\hat{\xi}$. Множество всех таких наборов обозначим символом Ξ. Пусть $U = \left\{A^{**} = (A, C(A)) \in \mathbb{R}^{n+2} :\ C(A) = C^*\right\}$. Сначала положим $U = \emptyset$.

Шаг 1. Берём произвольно базис $\sigma \in \Sigma$. Переходим к шагу 2.

Шаг 2. Берём произвольно набор $\xi = (\xi_0, \cdots, \xi_{n+1}) \in \Xi$ и переходим к шагу 3.

Шаг 3. Решаем относительно компонент $(a_0, \cdots, a_n)$ вектора A и неизвестной величины h систему алгебраических уравнений

$$p_n(A, t_{j_k})(p_n(A, t_{j_k}) - y_{1,j_k} - y_{2,j_k}) + y_{1,j_k} y_{2,j_k} = (-1)^{\xi_k} h,$$

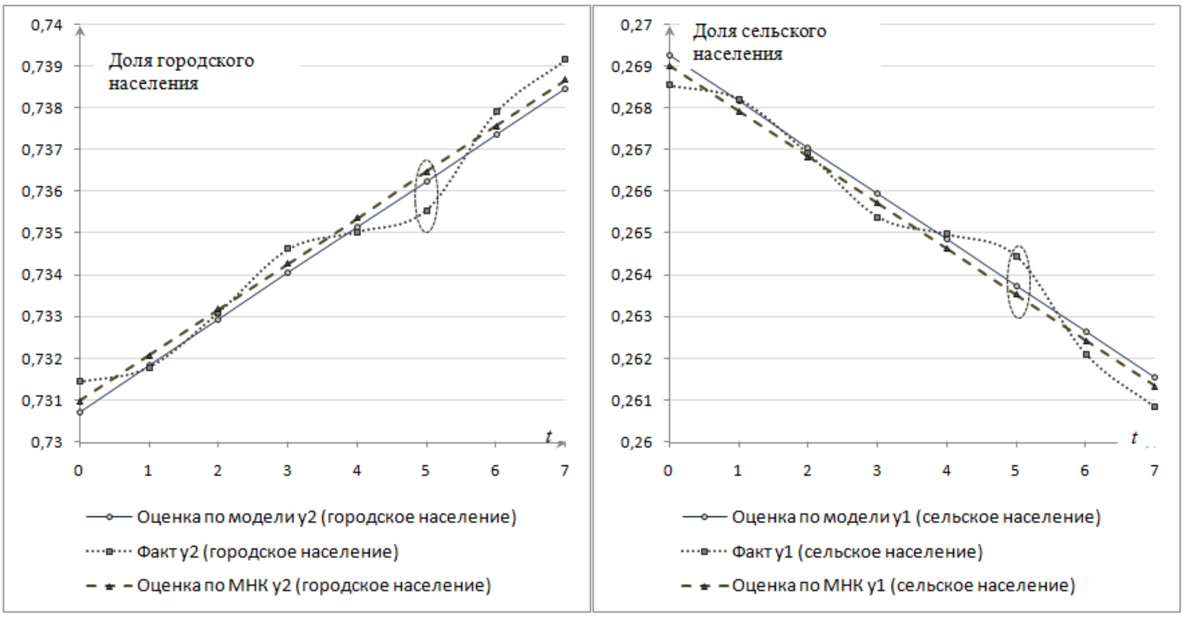
$$k = 0, \cdots, n+1.$$

Переходим к шагу 4.

Шаг 4. Для каждого полученного на шаге 3 решения, если только выполняется равенство $C(A) = |h|$, то включаем $A^{**} = (A, C(A))$ во множество U. Переходим к шагу 5.

*Шаг 5.*Берём новый набор $\xi = (\xi_0, \cdots, \xi_{n+1}) \in \Xi$ и переходим к шагу 3. Если все такие наборы для текущего базиса исчерпаны, берём новый базис $\sigma \in \Sigma$ и переходим к шагу 2. Если все базисы исчерпаны, завершаем алгоритм. Множество U — конечное множество, каждый элемент которого содержит $n+2$ компоненты, первые $n+1$ компоненты — координаты решений задачи (1), а последняя компонента для каждого элемента одинакова и является минимальным значением целевой функции задачи (1). Множеством решений задачи (1) является $\{A \in \mathbb{R}^{n+1}: (A, C(A)) \in U\}$.

Например, на рисунке приведён результат анализа усиления влияния городского населения России 2005-2012 гг. в долевом распределении «численность городского населения — численность сельского населения».



а *б*

Оценки долевой структуры населения по модели (1)

Получено два решения задачи (1), характеризующие процесс как с точки зрения усиления доли городского населения (*а*), так и с точки зрения снижения доли сельского населения (*б*). Проиллюстрировано сопоставление с оценками, полученными по методу наименьших квадратов (МНК). В [3–4] рассматриваются модели, смежные с (1) с точки зрения математических свойств множества элементов, на котором значения целевых функций иследуемых задач минимальны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Выгодчикова И. Ю.* О среднегеометрическом приближении сегментной функции алгебраическим полиномом // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : изд-во Сарат. ун-та, 2007. Вып. 9. С. 11–15.

2. *Выгодчикова И. Ю.* О задаче приближения двузначной функции алгебраическим полиномом // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2013. Вып. 16. С. 18–22.

3. *Демьянов В. Ф., Малозёмов В. Н.* Введение в минимакс. М. : Наука, 1972. 368 с.

4. *Выгодчикова И. Ю.* Алгоритм оценки параметров линейной множественной модели регрессии по минимаксному критерию // Прикладная информатика. 2015. Т. 10, № 4(58). С 105–116.

УДК 517.984

О КВАДРАТАХ ВО МНОЖЕСТВЕ ЭЛЕМЕНТОВ КОНЕЧНОГО ПОЛЯ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРИ РАЗЛОЖЕНИИ ПО БАЗИСУ[1]

М. Р. Габдуллин (Москва, РФ)

Gabdullin.Mikhail@yandex.ru

Пусть $\mathbb{F}_q$ — поле из $q = p^r$ элементов, $\{a_1, \ldots, a_r\}$ — базис $\mathbb{F}_q$ над $\mathbb{F}_p$. Для множества $D \subset \mathbb{F}_p$ через W_D будем обозначать множество элементов поля F_q, все коэффициенты которых при разложении по базису $\{a_1, \ldots, a_r\}$ принадлежат множеству D. Обозначим через Q множество ненулевых квадратов поля F_q. Положим $Q_0 = Q \cup \{0\}$. Будем считать, что $p \geq 3$, так как в случае $p = 2$ мы имеем $\mathbb{F}_q = Q_0$.

В недавней работе C.Dartyge, C.Mauduit, A.Sárkozy [1] было показано, что если множество D достаточно велико, то во множестве W_D имеются квадраты.

Теорема A. *Пусть $D \subset \mathbb{F}_p$, $2 \leq |D| \leq p - 1$. Тогда при $|D| \geq \geq \frac{(\sqrt{5}-1)p}{2}(1 + o_p(1))$ имеем $|W_D \cap Q_0| \geq 1$.*

В случае, когда множество D состоит из последовательных чисел, в этой же работе был получен аналог предыдущей теоремы.

Теорема B. *Пусть $D = \{0, \ldots, t-1\}$, где $2 \leq t \leq p - 1$. Тогда при $t \gg \sqrt{p}\log p$ имеем $|W_D \cap Q_0| \geq 1$.*

Автору удалось доказать следующие два утверждения, усиливающие теорему A.

Теорема 1. *Пусть $2r - 1 \leq p^{1/2}$, $\delta = \left(\sqrt{p}(2r-1)\right)^{2-r}$. Тогда при $|D| \geq (1+\delta)(2r-1)p^{1/2}$ справедливо $|W_D \cap Q| \geq 1$.*

[1]Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00702).