чисел $x = \{x\}_p$. Множество $B_\gamma(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p \, | \|x - a\|_p \le p^\gamma\}$ является p-адическим шаром. Обозначим $D_{-N}(M)$, где $N, M \in \mathbb{N}$, множество локально постоянных функций носитель которых содержиться в $B_N(0)$ и являющихся p^M — периодическими.

Для построения кратномаштабного анализа на $\mathbb{Q}_p$ [1] одним из важных условий является существование функции φ сдвиги, которой на элементы из H_0 ортонормированную систему в $L_2(\mathbb{Q}_p)$. При $p = 2$ и $M = 1$, этот вопрос был изучен в [2]. Мы изучаем способы нахождения таких функций при других значениях p.

Теорема. *Если p — нечетное простое или при $p = 2$ и $M \ge 2$, то множество $\varphi \in D_{-N}(M)$, сдвиги которых на элементы из H_0 образуют ортонормированную систему в $L_2(\mathbb{Q}_p)$ содержат не менее $p^{N+M} - 4(p^{N-1} - 1)$ линейно независимых функций в пространстве $D_{-N}(M)$*

Нами получен алгоритм нахождения таких функций и способы определения коэффициентов разложения по системе сдвигов этих функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Albeverio S., Evdokimov S.,. Skopina M* p-Adic Multiresolution Analysis and Wavelet Frames// J. Fourier Anal. Appl. 2010. Vol. 16, № 5. P. 693–714.

2. *Лукомский С. Ф.* Ортогональные системы сдвигов в поле p-адических чисел // Функциональные пространства и теория приближения функций : тез. докл. междунар. конф., посвящ. 110-летию со дня рожд. акад. С. М. Никольского. М. : МИАН, 2015. С. 174–175.

УДК 517.518

МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ СВЕРТКИ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ ЛОРЕНЦА И СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ИЗ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ – ВИЛЕНКИНА[1]

С. С. Волосивец, М. А. Кузнецова (Саратов, РФ)

VolosivetsSS@mail.ru, maffka2@bk.ru

Пусть $\{p_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{N}$, $2 \le p_n \le N$. По определению $m_0 = 1$, $m_n = p_n m_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, тогда каждое $x \in [0, 1)$ имеет разложение вида $x = \sum\limits_{n=1}^\infty x_n/m_n$, $x_n \in \mathbb{Z}_+ \cap [0, p_n)$. Разложение будет единственным, если для $x = k/m_l$, $k, l \in \mathbb{Z}_+$, $0 < k < m_l$, брать разложение с конечным числом $x_n \ne 0$. Каждое $k \in \mathbb{Z}_+$ единственным образом представимо в виде $k = \sum\limits_{i=1}^\infty k_i m_{i-1}$, $k_i \in \mathbb{Z}_+ \cap [0, p_i)$. Для $x \in [0, 1)$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ положим

[1]Работа С. С. Волосивца выполнена в рамках проектной части государственного задания Минобрнауки РФ (проект № 1.1520.2014К).

по определению $\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j k_j / m_j\right)$. Система $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ является ортонормированной на $[0,1)$ и полной в $L^1[0,1)$. Подробней об ее свойствах см. [1, §1.5]. Определим коэффициенты Фурье по этой системе для $f \in L^1[0,1)$ формулой $\widehat{f}(n) = \int_0^1 f(x)\overline{\chi_n(x)}dx, \quad n \in \mathbb{Z}_+$. Для $f, g \in L^1[0,1)$ определяется свертка $f * g(x) = \int_0^1 f(x \ominus t) g(t)\, dt$, где $\ominus$ – обобщенное вычитание, определяемое $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ (см. [1, §1.5]).

Для измеримой на $[0,1)$ функции f рассмотрим функцию распределения $\lambda_f(y)$ и невозрастающую перестановку f^*: $\lambda_f(y) = |\{x \in [0,1) : |f(x)| > y\}|$, $f^*(t) = \inf\{y : \lambda_f(y) \le t\}$. Если $0 < p, q < \infty$ и

$$\|f\|_{p,q}^* := \left(\int_0^1 [f^*(t)]^q t^{q/p-1}\, dt\right)^{1/q} < \infty,$$

то f принадлежит пространству Лоренца $L^{p,q}[0,1)$ (см. [2]). Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n = \{f \in L^1[0,1) : \widehat{f}(k) = 0, k \ge n\}$. Тогда $E_n(f)_{p,q} = \inf\{\|f - t_n\|_{p,q}^* : t_n \in \mathcal{P}_n\}$. При $p = q$ верно, что $L^{p,p}[0,1) = L^p[0,1)$ и мы пишем $E_n(f)_p$ вместо $E_n(f)_{p,p}$ и $\|\cdot\|_p$ вместо $\|\cdot\|_{p,p}$. Через $C^*[0,1)$ обозначим замыкание множества полиномов по системе $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ по норме $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1)} |f(x)|$.

Теорема 1. 1) *Пусть $1 < p_1,\ p_2 < 2$, $1 \le q_1 \le p_1'$, $1 \le q_2 \le p_2'$, $1/r = 1/p_1 + 1/p_2 - 1$, $1/s = 1/q_1 + 1/q_2$ (т.е. $1/s \ge 1 - 1/r$). Если $f \in L^{p_1,q_1}[0,1)$, $g \in L^{p_2,q_2}[0,1)$, то $h = f * g \in L^{r,s}[0,1)$ и верны неравенства*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{s/r'-1} |\widehat{h}(k)|^s\right)^{1/s} \le C\|f\|_{p_1,q_1}^* \|g\|_{p_2,q_2}^*,$$

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty} k^{s/r'-1} |\widehat{h}(k)|^s\right)^{1/s} \le C E_n(f)_{p_1,q_1} E_n(g)_{p_2,q_2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Аналогичное утверждение верно при $1 \le q_1, q_2 < \infty$, если $\{\widehat{f}(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\widehat{g}(n)\}_{n=1}^{\infty}$ квазимонотонны и $\{n\widehat{f}(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n\widehat{g}(n)\}_{n=1}^{\infty}$ возрастают.

2) *Пусть $1 < p_1,\ p_2 < 2$, $1/r = 1/p_1 + 1/p_2 - 1$. Если $f \in L^{p_1}[0,1)$, $g \in L^{p_2}[0,1)$, то $h = f * g \in L^r[0,1)$ и справедливы неравенства*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |\widehat{h}(k)|^{r'}\right)^{1/r'} \le \|f\|_{p_1} \|g\|_{p_2}, \quad \left(\sum_{k=n}^{\infty} |\widehat{h}(k)|^{r'}\right)^{1/r'} \le E_n(f)_{p_1} E_n(g)_{p_2},$$

где $n \in \mathbb{N}$.

В теоремах 2 и 3 обсуждается точность утверждений теоремы 1.

Теорема 2. 1) *Пусть* $1 < p_1,\ p_2 < 2,\ 1/r = 1/p_1 + 1/p_2 - 1,\ 1 \leq \leq q_1, q_2 < \infty,\ 1/s = 1/q_1 + 1/q_2$. *Если* $\theta < s$, *то существует* $f_0 \in \in L^{p_1,q_1}[0,1)$, $g_0 \in L^{p_2,q_2}[0,1)$ *такие, что* $h_0 = f_0 * g_0 \notin L^{r,\theta}[0,1)$ *и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{\theta/r'-1}(\widehat{h_0}(k))^{\theta}$ *расходится.*

2) *Пусть* $1 < p_1,\ p_2 < 2,\ 1/r = 1/p_1 + 1/p_2 - 1$. *Если* $\theta > r$ *и* $\gamma < r'$, *то найдутся* $f_0 \in L^{p_1}[0,1)$, $g_0 \in L^{p_2}[0,1)$, *такие что* $h_0 = f_0 * g_0 \notin L^{\theta}[0,1)$ *и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\widehat{h_0}(k)|^{\gamma}$ *расходится.*

Теорема 3. *Пусть* $1 < p_1,\ p_2 < 2,\ 1/r = 1/p_1 + 1/p_2 - 1$. *Пусть последовательности* $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty}$ *убывают к нулю и для них выполнены условия*

$$\sum_{k=n}^{\infty} \nu_k^{p_1} k^{-1} \asymp \nu_n^{p_1}, \quad n \in \mathbb{N}; \quad \sum_{k=n}^{\infty} \mu_k^{p_2} k^{-1} \asymp \nu_n^{p_2}, \quad n \in \mathbb{N};$$

и, кроме того, $\nu_n \leq C\nu_{2n}$, $\mu_n \leq C\mu_{2n}$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда существуют функции* $f_0 \in L^{p_1}[0,1)$, $g_0 \in L^{p_2}[0,1)$, *такие что* $E_n(f_0)_{p_1} \asymp \nu_n$, $E_n(g_0)_{p_2} \asymp \mu_n$, $n \in \mathbb{N}$ *и для* $h_0 = f_0 * g_0 \in L^r[0,1)$ *верно*

$$(\sum_{k=n}^{\infty} (\widehat{h_0}(k))^{r'})^{1/r'} \asymp \nu_n \mu_n.$$

Теорема 4. 1) *Пусть* $2 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, $f, g \in L^{p,q}[0,1)$, $h = f * g$. *Тогда* $\sum\limits_{k=n}^{\infty} |\widehat{h}(k)| \leq CE_n(f)_{p,q} E_n(f)_{p,q}$.

2) *Пусть* $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *убывающие к нулю последовательности, такие что*

$$\sum_{k=n}^{\infty} \nu_k k^{-1} \asymp \nu_n, \quad \sum_{k=n}^{\infty} \mu_k k^{-1} \asymp \mu_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

и $\nu_k \leq C\nu_{2k}$, $\mu_k \leq C\mu_{2k}$, $k \in \mathbb{N}$. *Тогда существуют* $f_0 \in C^*[0,1)$, $g_0 \in \in C^*[0,1)$, *такие что* $E_n(f_0)_{\infty} \asymp \nu_n$, $E_n(g_0)_{\infty} \asymp \mu_n$, $n \in \mathbb{N}$, *и для* $h_0 = = f_0 * g_0$ *справедливо соотношение* $\sum\limits_{k=n}^{\infty} |\widehat{h}(k)| \asymp \nu_n \mu_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 4 обобщает результат Н. А. Ильясова для тригонометрических рядов [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М. : Наука, 1987.

2. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический нализ на евклидовых пространствах. М. : Мир, 1974.

3. *Ilyasov N. A.* To the M.Riesz theorem on absolute convergence of the trigonometric Fourier series // Transactions of NAS of Azerbaijan. Ser. of phys.-tech. and math. sciences. 2004. Vol. 24, № 1. P. 113–120.

УДК 517.51

ОБОБЩЕННАЯ МОНОТОННОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОЙ p-ВАРИАЦИИ[1]

С. С. Волосивец, А. А. Тюленева (Саратов, РФ)
VolosivetsSS@mail.ru, anantuleneva@mail.ru

Пусть $1 < p < \infty$, $f(x)$ — измеримая, ограниченная, 2π-периодическая функция и $\xi = \{x_0 < x_1 < ... < x_n = x_0 + 2\pi\}$ — разбиение периода. Введем p-вариационную сумму

$$\varkappa_\xi^p(f) = \left(\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p\right)^{1/p}$$

и модули непрерывности $\omega_{1-1/p}(f,\delta) = \sup\{\varkappa_\xi^p(f) : \lambda(\xi) := \max_i(x_i - x_{i-1}) \le \delta\}$ и, для $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 2$, $\omega_{k-1/p}(f,\delta) = \sup\{\omega_{1-1/p}(\Delta_h^{k-1} f(x), |h|) : |h| \le \delta\}$, где $\Delta_h^k(x) = \sum\limits_{i=0}^k (-1)^{k-i}\binom{k}{i} f(x+ih)$, $k \in \mathbb{N}$, есть k-я разность f с шагом h. Пространство V_p функций ограниченной p-вариации с конечной нормой $\|f\|_{V_p} = \max(\|f\|_\infty, V_p(f))$ и пространство $C_p \subset V_p$ функций со свойством $\lim\limits_{\delta\to 0} \omega_{1-1/p}(f,\delta) = 0$ являются банаховыми (см. [1]). Если T_n — пространство тригонометрических полиномов порядка не выше n, то n-е наилучшее приближение в V_p вводится равенством $E_n(f)_{V_p} := \inf\limits_{t_n \in T_n} \|f - t_n\|_{V_p}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Аналогично вводится наилучшее приближение $E_n(f)_p$ в пространствах $L_{2\pi}^p$. Будем писать $\{a_n\}_{n=1}^\infty \in GM$, если для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено соотношение $\sum\limits_{i=n}^{2n-1} |a_i - a_{i+1}| \le C a_n$ (см. [2]).

Для положительной убывающей последовательности $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ будем писать $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \in B$, если $\sum\limits_{i=n}^\infty i^{-1}\varphi_i = O(\varphi_n)$, $n \in \mathbb{N}$, и $\{\varphi_n\} \in B_\alpha$, $\alpha > 0$, если $\sum\limits_{i=1}^n i^{\alpha-1}\varphi_i = O(n^\alpha \varphi_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Если $\varphi_n \le C\varphi_{2n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то говорим, что $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ удовлетворяет Δ_2-условию ($\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \in \Delta_2$).

[1]Работа С. С. Волосивца выполнена в рамках проектной части государственного задания Минобрнауки РФ (проект № 1.1520.2014К).