Теорема 1. *Если $\varphi(x) \in D_{L^2}$ (D_{L^2} область определения оператора L^2), то формальное решение (4) сходится равномерно в Q_T, его сумма $u(x,t)$ непрерывно дифференцируема по x и t и является классическим решением задачи (1)–(3).*

Теорема 2. *Если $\varphi(x) \in L_2^2[0,1]$, то ряд $u(x,t)$ формального решения сходится почти всюду по $x \in [0,1]$ и $t \in (-\infty, \infty)$, причем $u(x,0) = \varphi(x)$ почти всюду на $[0,1]$. Далее, если $\varphi_h(x) \in D_{L^2}$ сходится к $\varphi(x)$ в $L_2^2[0,1]$ при $h \to 0$, то $u_h(x,t)$ сходится к $u(x,t)$ по норме $L_2^2[Q_T]$ при любом $T > 0$, где $u_h(x,t)$ есть классическое решение задачи* (1)–(3) *с начальным условием $u_h(x,0) = \varphi_h(x)$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вагабов А.И.* Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. Ростов-н/Д : Изд-во Ростов. гос. ун-та, 1994. 160 с.

2. *Джаков П. В., Митягин Б. С.* Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака // УМН. 2006. Т. 61. № 4. С. 77–182.

3. *Баскаков А. Г., Дербушев А. В., Щербаков А. О.* Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом // Изв. РАН. Сер. матем. 2011. Т. 75, № 3. С. 3–28.

4. *Савчук А. М., Садовничая И. В.* Асимптотические формулы для фундаментальных решений системы Дирака с комплекснозначным суммируемым потенциалом // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 5. С. 573–584.

5. *Savchuk A. M., Shkalikov A. A.* Dirac operator with complex-valued summable potential // Math. Notes. 2014. Vol. 96, № 5. P. 3–36

6. *Бурлуцкая М.Ш., Курдюмов В.П., Хромов А.П.* Уточненные асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций системы Дирака // ДАН. 2012. Т. 443, № 4. С. 414–417.

7. *Бурлуцкая М.Ш., Курдюмов В.П., Хромов А.П.* Уточненные асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций системы Дирака с недифференцируемым потенциалом // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 22–30.

УДК 517.983

ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, ГРАНИЧНЫЕ ОСОБЕННОСТИ И ФРЕДГОЛЬМОВОСТЬ

В. Б. Васильев (Липецк, РФ)
vbv57@inbox.ru

0. История. Исторически теория псевдодифференциальных операторов появилась на свет в результате исследований нескольких математиков, я их перечислю, это не долго: С. Г. Михлин, A. Calderon, A. Zygmund, R. T. Seeley, А. С. Дынин (A. Dynin). Когда в работе J. Kohn, L. Nirenberg появился сам термин «псевдодифференциальный оператор», теория, в определенном смысле, уже была; их заслуга состояла в существенном расширении класса операторов и функциональных пространств. Во всех этих работах в качестве элементарной модели фигурировал оператор вида

$$u(x) \longmapsto \int\limits_{\mathbb{R}^m} K(\cdot, x-y)u(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

где ядро K можно трактовать в достаточно широком смысле, допуская даже обобщенные функции. Класс таких операторов содержит обычные свертки, многомерные сингулярные интегралы Кальдерона – Зигмунда, дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. В формуле (1) содержится «скрытый параметр», обозначенный точкой; если вместо точки написать x, то в класс операторов (1) уже попадут и операторы с переменными коэффициентами.

1. Принципы. Поскольку построить обратный для оператора с переменными коэффициентами (найти аналитический вид решения для соответствующего уравнения) — практически безнадежная задача, начались попытки сведения этой проблемы к более привычной, а именно, к операторам (уравнениям) типа Фредгольма, для которых уже имелась какая-то теория. К этому времени уже была продвинутая теория одномерных сингулярных интегральных уравнений, и это обстоятельство вселяло надежду получить что-то похожее в многомерном случае. Исследование коммутатора операторов типа (1) с переменными коэффициентами привело к выводу, что коммутатор компактен, в вид оператора (1) — это по сути свертка — к целесообразности использования преобразования Фурье. Конечно, развитие теории шло не так гладко, как здесь описывается, я для краткости опускаю некоторые фрагменты. Функция

$$\sigma(\cdot, \xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{-ix\cdot\xi} K(\cdot, x)\, dx$$

получила название *символа* оператора (1). Разбиение единицы и введение кокасательного расслоения T^*M компактного многообразия M позволяет перенести операторы и символы на многообразия. Оператор называют *эллиптическим*, если его символ не имеет вещественных нулей. Оказалось, что символы и операторы — это почти одно и то же, если в операторах пренебрегать вполне непрерывным слагаемым.

2. Алгебра и теорема Атьи – Зингера. Теорема Гельфанда – Наймарка утверждает, что всякая коммутативная банахова алгебра изоморфна алгебре непрерывных функций на пространстве ее максимальных идеалов. Символическое исчисление, построенное для псевдодифференциальных операторов, — это в известном смысле конкретизация этой глубокой теоремы. Топологические свойства индекса оператора и упомянутые алгебраические конструкции привели к появлению теоремы Атьи – Зингера, выражающую индекс оператора в топологических терминах. Это настолько ошеломило математический мир, что, наверное, еще полтора десятилетия спустя эта теорема уточнялась, обобщалась, развивалась, применялась и т. д. Правда, мне, например, до сих пор неясно, что же дает исследователю дополнительно знание *конкретной* величины индекса оператора.

3. Анализ и локальный принцип. Локальный принцип в операторной форме был провозглашен (или изобретен?) И. Б. Симоненко и утверждает следующее (конечно, следует добавить, что в неявной форме локальный принцип фигурировал в работах Ю. Шаудера, и специалисты по теории дифференциальных уравнений в частных производных называют его принципом замораживания коэффициентов): для того, чтобы линейный ограниченный оператор был оператором Фредгольма, необходимо и достаточно, чтобы все его локальные представители были обратимы. Конечно, присутствуют определенные ограничения, но мне хотелось передать суть принципа. Так, в частности, все псевдодифференциальные операторы с гладкими символами, действующие в шкале соболевских пространств, попадают под действие этого принципа. Например, (1) — это локальный представитель псевдодифференциального оператора на гладком компактном многообразии (без края). Появление даже гладкого края серьезно осложняет ситуацию.

4. Гладкая граница и снова алгебра. Появляется новый модельный оператор (локальный представитель) для многообразия с гладким краем в окрестности точки гладкости края — это оператор вида

$$u(x) \longmapsto \int\limits_{\mathbb{R}^m_+} K(\cdot, x-y)u(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^m_+, \tag{2}$$

где $\mathbb{R}^m_+$ — полупространство $\{x \in \mathbb{R}^m : x = (x_1, \cdots, x_m),\ x_m > 0\}$. Для обращения оператора типа (2) уже и эллиптичности недостаточно — на границе возможно появление появление произвольных функций — такова структура общего решения. Условие Шапиро – Лопатинского позволяет избавиться от произвола и выделить единственное решение. Уравнение с оператором (2) может оказаться и переопределенным, и в этом случае имеет смысл введения дополнительных неизвестных в виде интегралов типа потенциала. L. Boutet de Monvel построил алгебру краевых задач для эллиптических псевдодифференциальных уравнений, описав ее (2×2)-матрицами, элементы которых содержали все упомянутые типы операторов. Теорема об индексе краевой задачи была, грубо говоря, сведена к классическому случаю Атьи – Зингера.

5. Негладкая граница и геометрия. Граница многообразия может содержать точки, окрестности которых диффеоморфны конусу, многомерному ребру и т. д., но...что такое, например, конус? С легкой руки В. А. Кондратьева, например, конус в $\mathbb{R}^3$ вида $C_+^a = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 > a(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, a > 0\}$ следует трактовать как прямое произведение полуоси $(0, +\infty)$ на круг с центром в 0 радиуса a, затем применить одномерное преобразование Меллина и в результате получить краевую задачу в области с гладкой границей и параметром. Похоже, при таком подходе речь идет уже не о конусе, а о цилиндре с совсем другой геометрией.

6. Снова анализ. Для работы с локальным оператором

$$u(x) \longmapsto \int\limits_{C_+^a} K(\cdot, x-y)u(y)dy, \quad x \in C_+^a, \tag{3}$$

автор предлагает не расщеплять конус на сомнительные простейшие составляющие, а работать с ним как с целостной особенностью, полагая ее естественным многомерным обобщением полупрямой. Технические средства: ядра С. Бохнера для радиальных трубчатых областей над конусами, теория В. С. Владимирова аналитических функций в таких областях, теория М. И. Вишика и Г. И. Эскина (как эталон) краевых задач для эллиптических псевдодифференциальных уравнений на многообразиях с гладким краем плюс немного труда и терпения. Работы [1–5] — это попытки автора разобраться с обратимостью оператора (3) в контексте общей теории краевых задач для псевдодифференциальных уравнений на многообразиях с негладким краем.

7. Волновая факторизация. Наличие волновой факторизации в особой точке границы — это постулат. Автор выяснял, что класс символов, допускающих волновую факторизацию, достаточно широк, и даже строил конкретные примеры таких символов. Однако алгоритма построения такой факторизации пока нет, в отличие от теории Вишика – Эскина (там прекрасно работает аппарат классической краевой задачи Римана и одномерных сингулярных интегральных уравнений). Это в некоторой степени затрудняет продвижение теории, однако все полученные результаты настолько просты и изящны, что невольно верится в то, что удастся найти полное описание класса символов эллиптических операторов, допускающих волновую факторизацию.

Даже бозон Хиггса нашли...

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев В. Б.* Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. 2-е изд. М. : УРСС, 2010. 235 с.

2. *Vasilyev V. B.* Elliptic equations and boundary value problems in non-smooth domains // Pseudo Differential Operators: Analysis, Applications and Computations. Operator Theory : Advances and Applications. Birkhäuser, Basel, 2011. Vol. 213. P. 105–0121.

3. *Vasilyev, V. B.* Pseudo differential equations on manifolds with non-smooth boundaries // Differential and Difference Equations and Applications. Springer Proc. Math. & Stat. 2013. Vol. 47. P. 625–637.

4. *Vasilyev V. B.* New constructions in the theory of elliptic boundary value problems // Integral Methods in Science and Engineering. Theoretical and Computational Advances. Birkhäuser, Basel, 2015. P. 629–641.

5. *Васильев В. Б.* Псевдодифференциальные уравнения в конусах с точками сопряжения на границе // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 9. С. 1123–1135.

УДК 517.982.256

ОБ s–ЧИСЛАХ ДВУХВЕСОВОГО ОПЕРАТОРА СУММИРОВАНИЯ[1]

А. А. Васильева (Москва, РФ)

vasilyeva_nastya@inbox.ru

Пусть $u = (u_j)_{j=1}^\infty$, $w = (w_j)_{j=1}^\infty$, $1 < p \le q < \infty$. Определим оператор $S_{u,w} : l_p \to l_q$ по формуле $(S_{u,w}f)_j = w_j \sum\limits_{i=1}^{j} u_i f_i$, $f = (f_j)_{j=1}^\infty$.

Пусть $u_j = j^{-\alpha_u}(\log(j+1))^{-\lambda_u}$, $w_j = j^{-\alpha_w}(\log(j+1))^{-\lambda_w}$, $\alpha_w > \frac{1}{q}$, $\alpha_u + \alpha_w = \frac{1}{p'} + \frac{1}{q}$, $\lambda := \lambda_u + \lambda_w > 0$.

Обозначим через $d_n(S_{u,w} : l_p \to l_q)$, $a_n(S_{u,w} : l_p \to l_q)$ и $c_n(S_{u,w} : l_p \to \to l_q)$ соответственно колмогоровские, аппроксимативные и гельфандовские числа оператора $S_{u,w}$ (см. [1]). При оценке колмогоровских чисел будем обозначать $\vartheta_n = d_n$ и $\widehat{q} = q$, при оценке аппроксимативных чисел будем обозначать $\vartheta_n = a_n$ и $\widehat{q} = \min\{q, p'\}$, при оценок гельфандовских чисел будем обозначать $\vartheta_n = c_n$ и $\widehat{q} = p'$.

Положим $\lambda_{pq} = 0$ при $p = q$ или $\widehat{q} \le 2$, $\lambda_{pq} = \min\left\{1, \dfrac{1/p - 1/q}{1/2 - 1/\widehat{q}}\right\}$ при $p < q$, $\widehat{q} > 2$.

Теорема 1. *Если* $\lambda > \frac{1}{q} + \frac{1}{p'}$, *то*

$$\vartheta_n(S_{u,w} : l_p \to l_q) \asymp n^{-\frac{1}{q} - \frac{1}{p'} - \lambda_{pq}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\widehat{q}}\right)} (\log n)^{-\lambda + \frac{1}{q} + \frac{1}{p'}}.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00022).