К каждому уравнению (2) присоединим граничное условие

$$\Gamma_k y_k = c_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{3}$$

где $\Gamma_k : \widetilde{C}[a_0, b_0] \to B$ — линейные непрерывные отображения; $c_k \in B$; B — банахово пространство; $k = 0, 1, 2, \dots$.

Сужение оператора L_k на множество функций $y \in \mathcal{D}(L_k)$, удовлетворяющих условию $\Gamma_k y = 0$, обозначим L_{Γ_k}, а сужение оператора Γ_k на $\ker L_k$ обозначим $\widetilde{\Gamma}_k$.

Теорема 2. *Пусть оператор $\widetilde{\Gamma}_0$ взаимно однозначно отображает $\ker L_0$ на B и $\|\Gamma_n - \Gamma_0\| \to 0$, $\mathbf{V}_{[a_0,b_0]}(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0) \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда существуют, непрерывны и всюду определены операторы $L_{\Gamma_0}^{-1}$ и $L_{\Gamma_n}^{-1}$ (при достаточно больших n) и последовательность $\{L_{\Gamma_n}^{-1}\}$ сходится к $L_{\Gamma_0}^{-1}$ в равномерной операторной топологии.*

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы 2, последовательность $\{f_n\}$ сходится к f_0 в $L_1(H; a, b)$ и в граничных условиях (3) последовательность $\{c_n\}$ сходится к c_0 в B. Тогда при $k = 0$ и при достаточно больших k задача (2), (3) имеет единственное решение и $\|y_k(t) - y_0(t)\| \to 0$ при $k \to \infty$ равномерно по t.*

Пусть операторные меры $\mathbf{p}_k$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ абсолютно непрерывны, т.е. существуют такие функции $t \to p_k(t)$ $(t \in [a, b])$ со значениями в множестве линейных ограниченных операторов в H, что $\|p_k\| \in L_1(a, b)$ и $\mathbf{p}_k(\Delta) = \int_\Delta p_k(t)dt$ для любого борелевского множества $\Delta \subset [a, b]$. Тогда уравнения (2) переходят в дифференциальные уравнения $y_k'(t) = p_k(t)y_k(t) + f_k(t)$. Для таких уравнений в конечномерном случае сходимость решений граничных задач изучалась во многих работах (см. библиографию в [2], где получены наиболее общие результаты).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев : Наук. думка, 1965. 798 с.

2. *Кодлюк Т. И., Михайлец В. М., Рева Н. В.* Предельные теоремы для одномерных краевых задач // Укр. матем. журн. 2013. Т. 65, № 1. С. 70–81.

УДК 517.984

ИНВАРИАНТЫ НА СОВОКУПНОСТИ НАЧАЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ЦЕПНЫХ ЭКСПОНЕНТ

А. П. Буланов (Обнинск, РФ)

Рассмотрим две цепные экспоненты

$$L_b(z) = z \cdot B(z), \tag{1}$$

$$L_a(w) = w \cdot A(w). \tag{2}$$

Цепная экспонента (1) определяется последовательностью функций:

$$B(z) = e^{b_1 z \cdot B_1(z)}, \quad B_1(z) = e^{b_2 z \cdot B_2(z)}, \quad ..., \quad B_{k-1}(z) = e^{b_k z \cdot B_k(z)}, \ ...$$

Здесь вводится обозначение $B(z) = \langle e^z; b_1, b_2, ...\rangle$. Аналогично определяется экспонента (2), где $A(w) = \langle e^w; a_1, a_2, ...\rangle$.

Пусть последовательность показателей $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию $b_n \neq 0$, $n = 0, 1, 2, ...$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|b_n| = \bar{b} < \infty$. Цепные экспоненты (1) и (2) могут быть взаимно обратными функциями, тогда последовательность показателей $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, определяется рекуррентной формулой (5), приведенной ниже (см. также [1, с. 69]).

Первоначальная функция Ламберта

$$w = z \cdot \langle e^z; -b, -b, ...\rangle \tag{3}$$

определяется как обратная функция по отношению к элементарной функции

$$z = w \cdot e^{bw} = w \cdot \langle e^w; b, 0, 0, ...\rangle. \tag{4}$$

Из определения (3) мы видим $b_1 = b_2$; тогда, включая неравенство $b_1 \neq b_2$, мы приходим к обобщению понятия первоначальной функции Ламберта (3). И тогда вместо исходной функции (4), где обозначим $b = a_1$, можно рассматривать конечную цепную экспоненту

$$z = w \cdot \langle e^w; a_1, ..., a_l, 0, 0, ...\rangle,$$

где $a_k \neq 0$, $k = 1, 2, ..., l$, или бесконечную $z = w \cdot \langle e^w; a_1, a_2, ...\rangle$.

Это обобщение является промежуточным между первоначальной функцией Ламберта (4) и гиперфункциями Ламберта (Lambert's W function), которые ввел И. Н. Галидакис в 2004 году. W-функции Ламберта используются при решении некоторых функциональных уравнений, возникающих, в частности, в гравитационной механике (см. [2–4]).

Здесь задача заключается в том, чтобы по заданной функции $w = L_b(z) = z \cdot B(z)$ найти обратную к ней функцию $z = L_a(w) = w \cdot A(w)$, аналитическую в окрестности точки $w = 0$ (или наоборот: по заданной функции $z = L_a(w)$ найти обратную к ней функцию $w = L_b(z)$), т. е. по заданным показателям $b_1, b_2, \ldots$ найти показатели $a_1, a_2, \ldots$.

Легко определяются первые три показателя

$$a_1 = -b_1, \quad a_2 = b_2 - b_1, a_3 = \frac{1}{b_2 - b_1} \cdot (b_1^2 - 2b_1 b_2 + b_2 b_3).$$

Показатели $a_4, a_5, \ldots, a_n$ определяются по упомянутой рекуррентной формуле

$$a_n = \frac{-1}{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} \cdot \Bigg\{ \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}=n} \frac{k_1^{k_2} k_2^{k_3} \cdots k_{n-2}^{k_{n-1}}}{k_1! k_2! \cdots k_{n-1}!} \times$$

$$\times \big[(-(n+1))^{k_1-1} b_1^{k_1} b_2^{k_2} b_3^{k_3} \cdots b_{n-1}^{k_{n-1}} + a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_{n-1}^{k_{n-1}} \big] +$$

$$+ b_1 b_2 \cdots b_{n-1} b_n \Bigg\}. \qquad (5)$$

В работе [5] в развернутом виде представлены две формулы для определения «обратного» показателя a_4 посредством b_1, b_2, b_3, b_4 и показателя a_5 посредством b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 и a_1, a_2, a_3, a_4.

Цепная экспонента (1) в окрестности точки $z = 0$ является аналитической функцией и ее степенной ряд (см. [9] и [10])

$$B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^{(n)}(0)}{n!} \cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^{(n)}(b_1, b_2, \ldots, b_n)}{n!} \cdot z^n, \qquad (6)$$

где

$$H^{(n)}(b_1, b_2, \ldots, b_n) = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n=n} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot \times$$

$$\times b_1^{k_1} \cdot (b_2 \cdot k_1)^{k_2} \cdot (b_3 \cdot k_2)^{k_3} \cdot \ldots \cdot (b_n \cdot k_{n-1})^{k_n}, \qquad (7)$$

сходится в круге $K = \left\{ z : \ |z| < \frac{1}{be} \right\}$. В этом же круге сходится и степенной ряд

$$w = z \cdot B(z) = w(0) + \frac{w'(0)}{1!} \cdot z + \frac{w''(0)}{2!} \cdot z^2 + \cdots =$$

$$= B(0) \cdot z + \frac{B'(0)}{1!} \cdot z^2 + \frac{B''(0)}{2!} \cdot z^3 + \cdots \qquad (8)$$

Приведем в развернутом виде формы типа $H^{(k)}(a)$ 1-й, 2-й, 3-й и 4-й степени от показателей a_2, a_3, a_4 и a_5, взятых из определения (7).

$$H^{(1)}(a_2) = a_2, \ H^{(2)}(a_2, a_3) = 2a_2 a_3 + a_2^2, \qquad (9)$$

$$H^{(3)}(a_2, a_3, a_4) = 6a_2 a_3 a_4 + 3a_2 a_3^2 + 6a_2^2 a_3 + a_2^3, \qquad (10)$$

$$H^{(4)}(a_2, a_3, a_4, a_5) = 24a_2 a_3 a_4 a_5 + 12a_2 a_3 a_4^2 + 24a_2 a_3^2 a_4 + 4a_2 a_3^3 +$$

$$+ 24a_2^2 a_3 a_4 + 24a_2^2 a_3^2 + 12a_2^3 a_3 + a_2^4 \qquad (11)$$

Аналогично имеем такие же формы от показателей b_2, b_3, b_4, b_5.

Если развернуть сумму в правой части формулы (5), то напишем слагаемые в количестве $2^n - 1$. В работе [6] представлена в развернутом виде формула для определения a_6 посредством $b_1, \ldots, b_6$ и $a_1, \ldots, a_5$. В правой части этой формулы в фигурной скобке имеем 63 слагаемых. Если же в тех слагаемых, в которых множителями являются a_k, заменить каждый множитель a_k его выражением, вычисленном по данной рекуррентной формуле (5) посредством $b_1, b_2, \ldots, b_k$, то количество слагаемых во много раз увеличится, но среди них окажутся подобные.

Поэтому есть смысл выявлять инварианты. В работах [7] и [8] намечены два пути построения инвариантов, которые существенно уменьшают количество слагаемых в исходном уравнении:

$$0 = z^{(n+1)}(0)|_a - z^{(n+1)}(0)|_b = (n+1)H^{(n)}(a_1, a_2, ..., a_n) -$$
$$-H^{(n)}(-(n+1) \cdot b_1, b_2, ..., b_n). \tag{12}$$

В работе [9] (см. на с. 60 лемму 7) доказана формула, по которой можно форму порядка n и степени n $H^{(n)}(a_{r+1}, a_{r+2}, ..., a_{r+n})$ представить в виде суммы, слагаемые которой являются формами степени n, но порядок формы в каждом слагаемом строго меньше n. При этом заметим, что эти формулы в каждом слагаемом не будут содержать в качестве аргумента показатель a_{r+1}. В уравнении (12) формы $H^{(n)}(a_1, a_2, ..., a_n)$ $H^{(n)}(-(n+1)b_1, b_2, b_3, ..., b_n)$ $n-$го порядка представим посредством форм, порядок которых строго меньше n. Тогда вместо исходного уравнения (12) (поделив части на $(n+1)a_1$) мы имеем равносильное уравнение:

$$\left.\frac{z^{(n+1)}(0)}{(n+1)a_1}\right|_a - \left.\frac{z^{(n+1)}(0)}{(n+1)a_1}\right|_b = 0 =$$
$$= \left[nH^{(n-1)}(a_2, a_3, \ldots, a_n) - nH^{(n-1)}(b_2, b_3, \ldots, b_n\right] +$$
$$+\left[\binom{n}{2} a_1 H^{(n-2)}(2a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}) -\right.$$
$$\left.-\binom{n}{2}(n+1)a_1 H^{(n-2)}(2b_2, b_3, \ldots, b_{n-1})\right] + \ldots$$
$$+\left[\binom{n}{n-1} a_1^{n-2} H^{(1)}((n-1)a_2) -\right.$$
$$\left.-\binom{n}{n-1}(n+1)^{n-2} a_1^{n-2} H^{(1)}((n-1)b_2)\right] + \left[a_1^{n-1} - (n+1)^{n-1} a_1^{n-1}\right]. \tag{14}$$

Если в правой части равенства (14) мы обнаруживаем «равновесную» пару типа $\phi(a)-\phi(b)$, то перемещая слагаемое $-\phi(b)$ в левую часть, где пока еще стоит ноль, мы тем самым строим инвариант n-го порядка. Видно, что разность в первых квадратных скобках является равновесной парой. Разности во вторых квадратных скобках и последующих не являются равновесными и подлежат преобразованиям.

Приведем несколько простых инвариантов (см. ниже список (15)) на совокупности начальных показателей, которые используются как непосредственно, так и в качестве аргументов полиномов, которые могут оказаться инвариантами:

$$\Delta_0=\Delta_0(a)=a_1^2=b_1^2=\Delta_0(b),$$

$$\begin{gathered}\Delta_1=\Delta_1(a)=2a_2-a_1=2b_2-b_1=\Delta_1(b),\\ \Delta_2=\Delta_2(a)=a_2\cdot a_3-a_2^2=b_2\cdot b_3-b_2^2=\Delta_2(b),\\ \varkappa_1=a_2^2-2a_1a_2+a_2a_3=b_2^2-2b_1b_2+b_2b_3,\\ \varkappa_2=a_2(a_2-a_1)=a_2b_2=b_2(b_2-b_1),\\ \varkappa_3=2a_2a_3-2a_1a_2+a_1^2=2b_2b_3-2b_1b_2+b_1^2,\\ \overline{\varkappa_3}=12\varkappa_1-8\Delta_0=12a_2a_3-24a_1a_2+12a_2^2+8a_1^2=\\ =12b_2b_3-24b_1b_2+12b_2^2+8b_1^2. \end{gathered}\tag{15}$$

В работе [8] (см. там формулу (29)) доказана

Теорема 1. На совокупности показателей обратных функций $w=$ $=z\cdot B(z)$ и $z=w\cdot A(z)$ формы третьей степени

$$\Delta_3=\Delta_3(a)=H^{(3)}(a_2,a_3,a_4)-a_1\overline{\varkappa_3}=H^{(3)}(b_2,b_3,b_4)-b_1\overline{\varkappa_3}=\Delta_3(b)\tag{16}$$

являются инвариантом 4-го порядка.

Теперь, добавляя к списку (15) инвариант Δ_3 и ещё инвариант $\varkappa_4$

$$\varkappa_4=-10\Delta_3-30\Delta_2\Delta_1-45\Delta_1\varkappa_2+\frac{35}{2}\Delta_1\Delta_0.\tag{17}$$

сформулируем утверждение

Теорема 2. На совокупности показателей взаимно обратных функций $w=z\cdot B(z)$ и $z=w\cdot A(z)$ формы четвертой степени

$$\begin{gathered}\Delta_4=\Delta_4(a)=H^{(4)}(a_2,a_3,a_4,a_5)-a_1\varkappa_4=\\ =H^{(4)}(b_2,b_3,b_4,b_5)-b_1\varkappa_4=\Delta_4(b)\end{gathered}\tag{18}$$

являются инвариантом 5-го порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Буланов А. П.* Цепные экспоненты и функции Ламберта // Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского. 2011. Т. 43 С. 64–71.

2. *Дубинов А. Е., Галидакис И. Н.* Явное решение уравнения Кеплера // Письма в ЭЧАЯ, 2007. Т. 4 Н.3(139), С. 365–370.

3. *Galidakis I. N.* On an application of Lambert's W function to infinite exponentials // Complex Var. Theory Appl. 2004. Vol. 49, № 11. P. 759–780.

4. *Galidacis I. N.* On Solving the p-th Complex Auxiliary Equation $f^{(p)}(z) = z$ //Complex Variables. 2005. Vol. 50, № 13. P. 977–997.

5. *Буланов А. П.* О рекуррентной формуле определения показателей обратной функции Ламберта // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 16-й Сарат. зим. шк. Саратов, 2012. С. 29–32.

6. *Буланов А. П.* Шестой показатель обратной функции Ламберта, представленной цепной экспонентой // Комплексный анализ и приложения : материалы VI Петрозаводской междунар. конф. Петрозаводск, 2012. С. 5–10.

7. *Буланов А. П.* Об инвариантах на совокупности показателей взаимно обратных функций Ламберта, представленных цепными экспонентами // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Воронеж. зим. матем. шк. Воронеж, 2013. С. 295–303.

8. *Буланов А. П.* О возможных инвариантах на совокупности показателей взаимно обратных цепных экспонент // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 17-й междунар. Сарат. зим. шк. Саратов, 2014. С. 52–61.

9. *Буланов А. П.* Регулярность степеней бесконечной кратности // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62, № 5. С. 49–78.

10. *Буланов А. П.* Бесконечная цепная степень с коэффициентами, принимающими поочередно два значения // Матем. сб. 2001. Т. 192, № 11. С. 3–34.

УДК 517.984

О РЕШЕНИИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С НЕПРЕРЫВНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ[1]

М. Ш. Бурлуцкая (Воронеж, РФ)
bmsh2001@mail.ru

Рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = B\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + Q(x)u(x,t), \tag{1}$$

$$u_1(0,t) = u_2(0,t), \qquad u_1(1,t) = u_2(1,t), \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{3}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 13-01-00238, № 14-01-00867).