УДК 517.983

О СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЙ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. М. Брук (Саратов, РФ)
vladislavbruk@mail.ru

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, $[a,b]$ — отрезок, $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Рассмотрим функцию $\Delta\to\mathbf{p}(\Delta)$, определенную на борелевских множествах $\Delta\subset[a,b]$ и принимающую значения в множестве ограниченных линейных операторов, действующих в H. Функция $\mathbf{p}$ называется операторной мерой на $[a,b]$ (см., например, [1, с. 324]), если $\mathbf{p}$ равна нулю на пустом множестве и для любых непересекающихся борелевских множеств Δ_n справедливо равенство $\mathbf{p}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Delta_n\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathbf{p}(\Delta_n)$ со слабо сходящимся рядом. Далее всякую меру $\mathbf{p}$, определенную на борелевских множествах $\Delta\subset[a,b]$ (включая «обычную» меру Лебега μ, для которой $\mu[\alpha,\beta)=\beta-\alpha$), продолжаем на некоторый отрезок $[a_0,b_0]\supset(a_0,b_0)\supset[a,b]$, полагая $\mathbf{p}(\Delta)=0$ для всех борелевских множеств $\Delta\subset[a_0,b_0]\backslash[a,b]$.

Через $\mathbf{V}_\Delta(\mathbf{p})$ обозначим $\mathbf{V}_\Delta(\mathbf{p})=\rho(\Delta)=\sup\sum\limits_j\|\mathbf{p}(\Delta_j)\|$, где sup распространяется на конечные суммы непересекающихся борелевских множеств $\Delta_j\subset\Delta$. Число $\mathbf{V}_\Delta(\mathbf{p})$ называется вариацией меры $\mathbf{p}$ на борелевском множестве Δ.

Пусть мера $\mathbf{p}$ имеет ограниченную вариацию на $[a,b]$. Тогда для ρ-почти всех $\xi\in[a,b]$ существует такая операторная функция $\xi\to\Psi(\xi)$ со значениями в множестве линейных ограниченных операторов в H, $\|\Psi(\xi)\|=1$, что для любого борелевского множества $\Delta\subset[a,b]$ справедливо равенство $\mathbf{p}(\Delta)=\int\limits_\Delta\Psi(\xi)d\rho$. Функция Ψ определяется однозначно с точностью до значений на множестве нулевой ρ-меры и этот интеграл сходится в смысле обычной нормы операторов ([1, с. 325]).

Функция h со значениями в H интегрируема по мере $\mathbf{p}$ на Δ, если существует интеграл (в смысле Бохнера) $\int\limits_\Delta\Psi(t)h(t)d\rho=\int\limits_\Delta(d\mathbf{p})h(t)$. Далее символом $\int\limits_{t_0}^{t}$ обозначаем $\int\limits_{[t_0,t)}$, если $t_0<t$; $-\int\limits_{[t,t_0)}$, если $t_0>t$; и 0, если $t_0=t$.

Предположим, что функция h интегрируема по мере $\mathbf{p}$ на (a_0,b_0). Тогда функция $y(t)=\int\limits_{t_0}^{t}(d\mathbf{p})h(s)$ непрерывна слева в сильном смысле. Пусть $[l_1,l_2]\subset[a_0,b_0]$. Рассмотрим множество функций, измеримых по Борелю, ограниченных на $[l_1, l_2]$, непрерывных слева (в сильном смысле) на $(l_1, l_2]$ и принимающих значения в H. Определим норму равенством $\|u\|_{[l_1,l_2]} = \sup\limits_{t\in[l_1,l_2]} \|u(t)\|$. Полученное банахово пространство обозначим $\widetilde{C}[l_1, l_2]$.

Теорема 1. *Пусть мера* $\mathbf{p}$ *имеет ограниченную вариацию на* $[a, b]$. *Тогда для любой функции* $g \in \widetilde{C}[a_0, b_0]$ *существует единственное решение уравнения*

$$y(t) = \int\limits_{t_0}^{t} (d\mathbf{p})y(s) + g(t), \quad a_0 \leqslant t_0 \leqslant b_0, \quad a_0 \leqslant t \leqslant b_0, \tag{1}$$

принадлежащее пространству $\widetilde{C}[\tau, b_0]$, *где* $\tau < t_0$ *и* τ *достаточно близко к* t_0.

Следствие 1. *Если в теореме* 1 $t_0 = a_0$, *то существует единственное решение уравнения* (1), *принадлежащее* $\widetilde{C}[a_0, b_0]$.

Пример. Пусть $H = \mathbb{C}$. Рассмотрим на отрезке $[0, 2]$ меру $\mathbf{p}$, заданную производящей функцией $\widehat{p}(t)$, равной нулю при $t \leqslant 1$ и -1 при $t > 1$. Тогда решением уравнения $y = \int\limits_2^t y\, d\mathbf{p}$, кроме функции, тождественно равной нулю, является функция $w(t)$, равная 1, если $t \leqslant 1$, и нулю, если $t > 1$. Далее, функция $y = 1$ является решением уравнения $y = 1 + \int\limits_2^t y\, d\mathbf{p}$ при $1 < t \leqslant 2$. Однако это решение не продолжается влево за точку 1. Действительно, пусть решение продолжено каким-либо образом за точку 1. Тогда $y(1) = -\int\limits_1^2 y\, d\mathbf{p}$. Отсюда $y(1) = 1 + \int\limits_2^1 y\, d\mathbf{p} = 1 + y(1)$, что невозможно.

Рассмотрим интегральные уравнения

$$y_k(t) = x_k + \int\limits_{a_0}^{t} (d\mathbf{p}_k)y_k(s) + \int\limits_{a_0}^{t} f_k(s)\, ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{2}$$

где $x_k \in H$, $f_k \in L_1(H; a, b)$ и f_k обращается в нуль вне отрезка $[a, b]$. С каждым уравнением (2) свяжем оператор L_k следующим образом. Область определения $\mathcal{D}(L_k)$ оператора L_k состоит из функций $y_k \in \widetilde{C}[a_0, b_0]$, для которых существует такой элемент $x_k \in H$ и такая функция $f_k \in L_1(H; a, b)$, что выполняется (2). На $\mathcal{D}(L_k)$ оператор L_k действует согласно формуле $L_k y_k = f_k$. Таким образом, $L_k \subset \widetilde{C}[a_0, b_0] \times L_1(H; a, b)$. Оператор L_k замкнут.

К каждому уравнению (2) присоединим граничное условие

$$\Gamma_k y_k = c_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{3}$$

где $\Gamma_k : \widetilde{C}[a_0, b_0] \to B$ — линейные непрерывные отображения; $c_k \in B$; B — банахово пространство; $k = 0, 1, 2, \dots$.

Сужение оператора L_k на множество функций $y \in \mathcal{D}(L_k)$, удовлетворяющих условию $\Gamma_k y = 0$, обозначим L_{Γ_k}, а сужение оператора Γ_k на $\ker L_k$ обозначим $\widetilde{\Gamma}_k$.

Теорема 2. *Пусть оператор $\widetilde{\Gamma}_0$ взаимно однозначно отображает $\ker L_0$ на B и $\|\Gamma_n - \Gamma_0\| \to 0$, $\mathbf{V}_{[a_0,b_0]}(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0) \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда существуют, непрерывны и всюду определены операторы $L^{-1}_{\Gamma_0}$ и $L^{-1}_{\Gamma_n}$ (при достаточно больших n) и последовательность $\{L^{-1}_{\Gamma_n}\}$ сходится к $L^{-1}_{\Gamma_0}$ в равномерной операторной топологии.*

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы* 2, *последовательность $\{f_n\}$ сходится к f_0 в $L_1(H; a, b)$ и в граничных условиях* (3) *последовательность $\{c_n\}$ сходится к c_0 в B. Тогда при $k = 0$ и при достаточно больших k задача* (2), (3) *имеет единственное решение и $\|y_k(t) - y_0(t)\| \to 0$ при $k \to \infty$ равномерно по t.*

Пусть операторные меры $\mathbf{p}_k$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ абсолютно непрерывны, т.е. существуют такие функции $t \to p_k(t)$ $(t \in [a, b])$ со значениями в множестве линейных ограниченных операторов в H, что $\|p_k\| \in L_1(a, b)$ и $\mathbf{p}_k(\Delta) = \int_\Delta p_k(t)dt$ для любого борелевского множества $\Delta \subset [a, b]$. Тогда уравнения (2) переходят в дифференциальные уравнения $y'_k(t) = p_k(t)y_k(t) + f_k(t)$. Для таких уравнений в конечномерном случае сходимость решений граничных задач изучалась во многих работах (см. библиографию в [2], где получены наиболее общие результаты).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев : Наук. думка, 1965. 798 с.

2. *Кодлюк Т. И., Михайлец В. М., Рева Н. В.* Предельные теоремы для одномерных краевых задач // Укр. матем. журн. 2013. Т. 65, № 1. С. 70–81.

УДК 517.984

ИНВАРИАНТЫ НА СОВОКУПНОСТИ НАЧАЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ЦЕПНЫХ ЭКСПОНЕНТ

А. П. Буланов (Обнинск, РФ)

Рассмотрим две цепные экспоненты

$$L_b(z) = z \cdot B(z), \tag{1}$$