2. *Коровкин П. П.* О сходимости линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций // ДАН СССР. 1953. Т. 90, № 5. С. 961–964.

3. *Shisha O., Mond B.* The degree of convergence of linear positive operators // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 1968. Vol. 60. P. 1196–1200.

4. *Gonska H. H.* Quantitative Korovkin type theorems on simultaneous approximation // Math. Z. 1984. Vol. 186. P. 419–433.

5. *Knoop H.-B., Pottinger P.* Ein satz vom Korovkin-typ fur C^k raume // Math. Z. 1976. Vol. 148. P. 23–32.

6. *Muñoz-Delgado F. J., Ramírez-González V., Cárdenas-Morales D.* Qualitative Korovkin-Type Results on Conservative Approximation // J. Approx. Theory. 1998. Vol. 94. P. 144–159.

7. *Păltănea R.* Best constants in estimates with second order moduli of continuity // Approx. Theory. (Proc. Int. Dortmund meeting on Approx. Theory 1995, ed. by M. W. Müller et al.). Berlin : Akad. Verlag 1995. P. 251–275.

8. *Kacsó D. P.* Simultaneous approximation by almost convex operators // Rend. Circ. Mat. Palermo. 2002. Suppl. 68 (2), pt. II. P. 523–538.

517.5

ТОНКИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ ХАЙЛАША – СОБОЛЕВА M^p_α ПРИ $p>0$. ТОЧКИ ЛЕБЕГА

С. А. Бондарев, В. Г. Кротов (Минск, Беларусь)
bondarevSA@bsu.by, krotov@bsu.by

Пусть (X,d,μ) — метрическое пространство с метрикой d и регулярной борелевской мерой μ. Шары, порожденные метрикой d, обозначаем так:

$$B(x,r)=\{y\in X : d(x,y)<r\}.$$

Будем предполагать, что мера μ удовлетворяет условию удвоения с показателем $\gamma>0$: для некоторой постоянной a_μ выполнено неравенство

$$\mu(B(x,R))\le a_\mu\left(\frac{R}{r}\right)^\gamma\mu(B(x,r)),\quad x\in X,\ 0<r\le R.$$

Для функции $f\in L^p(X)$ обозначим через $D_\alpha[f]$ класс всех неотрицательных μ-измеримых функций g, для каждой из которых существует такое множество $E\subset X$, $\mu(E)=0$, что

$$|f(x)-f(y)|\le\big[d(x,y)\big]^\alpha[g(x)+g(y)],\quad x,y\in X\setminus E.$$

Элементы $D_\alpha[f]$ называются α-градиентами функции f.

Классы Хайлаша – Соболева $M^p_\alpha(X)$, $p, \alpha > 0$, вводятся так

$$M^p_\alpha(X) = \{f \in L^p(X) : D_\alpha[f] \cap L^p(X) \neq \varnothing\},$$

они нормируются следующим образом:

$$\|f\|_{W^p_\alpha(X)} = \|f\|_{L^p(X)} + \inf\left\{\|g\|_{L^p(X)} : g \in D_\alpha[f] \cap L^p(X)\right\}.$$

(при $0 < p < 1$ выражение это — лишь квазинорма).

Будем использовать обозначение

$$f_B = \fint_B f\,d\mu = \frac{1}{\mu(B)} \int_B f\,d\mu \tag{1}$$

для среднего значения функции $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$ по шару $B \subset X$.

Мы изучаем массивность множества точек Лебега для функций из $M^p_\alpha(X)$. Этой задаче посвящено достаточно много работ (см., например, [1–3], а также библиографию в этих работах).

Обычно точками Лебега называют такие точки x, в которых интегральные средние (1) по шарам $B = B(x, r)$ сходятся при $r \to +0$.

Мы будем рассматривать функции, которые не являются суммируемыми, в общем случае. Поэтому нам необходимо обобщить понятие точки Лебега с помощью подходящей замены интегральных средних.

Для любых $p > 0$, шара $B \subset X$ и функции $f \in L^p(B)$ существует число $I^{(p)}_B f$, для которого

$$\fint_B |f(y) - I^{(p)}_B f|^p\,d\mu(y) = \inf_{I \in \mathbb{R}} \fint_B |f(y) - I|^p\,d\mu(y).$$

При $0 < p \leq 1$ число $I^{(p)}_B f$ может определяться неоднозначно. В этом случае фиксируем любое из возможных значений $I^{(p)}_B f$. Эти числа будут играть роль интегральных средних в случаях, когда функция несуммируема.

Классы M^p_α стандартно порождают емкости

$$\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E) = \inf\{\|f\|^p_{M^p_\alpha} : f \in M^p_\alpha(X), f \geq 1 \text{ в окрестности } E \subset X\}.$$

Используем эти емкости для оценки исключительных множеств.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha \in (0, 1]$, $0 < p < \gamma/\alpha$ *и* $f \in M^p_\alpha(X)$. *Тогда существует такое множество* $E \subset X$, *что* $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E) = 0$ *и для любого*

$x \in X \setminus E$ существует предел

$$\lim_{r\to+0} I^{(p)}_{B(x,r)} f = f^*(x). \tag{2}$$

Кроме того,

$$\lim_{r\to+0} \fint_{B(x,r)} |f - f^*(x)|^q \, d\mu = 0, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\gamma}. \tag{3}$$

Замечание 1. В дополнение к теореме 1 для любого $x \in X \setminus E$ мы можем утверждать следующее: 1) если $0 < \theta \le q$, то очевидно

$$\lim_{r\to+0} \fint_{B(x,r)} |f - I^{(\theta)}_{B(x,r)} f|^\theta \, d\mu = 0,$$

2) если $0 < \theta \le q$, то

$$\lim_{r\to+0} I^{(\theta)}_{B(x,r)} f = f^*(x),$$

3) если $p \ge \frac{\gamma}{\gamma+\alpha}$ (тогда $q \ge 1$), то

$$\lim_{r\to+0} \fint_{B(x,r)} |f - f_{B(x,r)}|^q \, d\mu = 0,$$

в частности,

$$\lim_{r\to+0} f_{B(x,r)} = f^*(x).$$

В недавнем препринте [4] рассматривался другой подход к определению точек Лебега, основанный на использовании так называемых δ-медиан $(0 < \delta \le 1/2)$

$$m^\delta_f(E) = \inf\{a \in \mathbb{R} : \mu(\{x \in E : f(x) > a\}) < \delta\mu(E)\}.$$

Основной результат из [4], относящийся к классам $M^p_\alpha(X)$, состоит в следующем.

Следствие 1. *Пусть $\alpha \in (0,1]$, $0 < p < \gamma/\alpha$ и $f \in M^p_\alpha(X)$. Тогда существует такое множество $E \subset X$, что $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E) = 0$ и для любого $x \in X \setminus E$ и любого $0 < \delta \le 1/2$ существует предел*

$$\lim_{r\to+0} m^\delta_f(B(x,r)) = f^*(x). \tag{4}$$

Это утверждение вытекает из теоремы 1 и простого неравенства

$$|m_f^\delta(B) - I_B^{(p)} f| \le \left(\frac{1}{\delta} \fint_B |f - I_B^{(p)} f|^p \, d\mu \right)^{1/p}. \tag{5}$$

Рассмотрим теперь другой способ оценки дополнения ко множеству, на котором выполнено (2). Он основан на использовании так называемых модифицированных вместимостей и мер Хаусдорфа (см., например, [5, 6]).

Пусть задана (измеряющая) возрастающая функция $h : (0,1] \to \to (0,1]$, $h(+0) = 0$. Введем классические вместимость

$$H_R^h(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^\infty h(r_i) : E \subset \bigcup_{i=1}^\infty B(x_i, r_i), \quad r_i < R \right\}$$

и меру Хаусдорфа

$$H^h(E) = \lim_{R \to +0} H_R^h(E).$$

множества $E \subset X$ (в случае $h(t) = t^s$ пишем $H^s(E)$ вместо $H^{t^s}(E)$). Размерность Хаусдорфа определяется как

$$\dim_H(E) = \inf\{s : H^s(E) = 0\}.$$

Кроме того, модифицированной R-вместимостью Хаусдорфа коразмерности h для множества $E \subset X$ называется

$$\mathcal{H}_R^h(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^\infty \frac{\mu(B(x_i, r_i))}{h(r_i)} : E \subset \bigcup_{i=1}^\infty B(x_i, r_i), \quad r_i < R \right\}$$

(точная нижняя грань здесь и определении классической H_R^h берется по всевозможным покрытиям множества E счетными семействами шаров), а величина

$$\mathcal{H}^h(E) = \lim_{R \to +0} \mathcal{H}_R^h(E)$$

называется модифицированной мерой Хаусдорфа коразмерности h. Отметим, что вместимость и мера Хаусдорфа (модифицированные или классические) имеют одинаковые наборы нулевых множеств.

Мы будем рассматривать измеряющие функции h вида

$$h(t) = \left(\frac{t^\alpha}{\varphi(t)} \right)^p, \tag{6}$$

где $\varphi : (0,1] \to (0,1]$ — возрастающая функция, $\varphi(+0) = 0$.

Теорема 2. *Пусть $\alpha > 0$, $0 < p < \gamma/\alpha$ и $f \in M_\alpha^p(X)$. Пусть также задана такая измеряющая функция* (6), *что*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varphi(2^{-i}) < \infty. \tag{7}$$

Тогда существует такое множество $E \subset X$, что $\mathcal{H}^h(E) = 0$ и для любого $x \in X \setminus E$ существует предел (2) *и выполнено* (3).

Замечание 1 к теореме 1 сохраняет силу и для теоремы 2.

Из теоремы 2 и неравенства (5) выводится подобный результат с использованием медиан $m_f^\delta(B(x,r))$ на месте наилучших приближений $I_{B(x,r)}^{(p)} f$.

Следствие 2. *Пусть $\alpha > 0$, $0 < p < \gamma/\alpha$, $f \in M_\alpha^p(X)$ и h — измеряющая функция* (6), *удовлетворяющая условию* (7). *Тогда существует такое множество $E \subset X$, что $\mathcal{H}^h(E) = 0$ и для любого $x \in X \setminus E$ и любого $0 < \delta \le 1/2$ существует предел* (4) *и выполнено* (3).

Это утверждение без соотношения (3) для $\alpha \in (0,1]$ и $p \in (0,1)$ было доказано в [6].

Следствие 3. *Пусть $\alpha > 0$, $0 < p < \gamma/\alpha$ и $f \in M_\alpha^p(X)$. Тогда существует такое множество $E \subset X$, что $\dim_H(E) \le \gamma - \alpha p$ и для любого $x \in X \setminus E$ и существует предел (4) и выполнено (3).*

Неотрицательную функцию ν, определенную на σ–алгебре борелевских множеств из X, будем называть внешней мерой, если она монотонна и субаддитивна с некоторой постоянной a_ν. Последнее означает, что для любой последовательности борелевских множеств $E_k \subset X$ выполнено неравенство

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \le a_\nu \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E_k).$$

Теорема 3. *Пусть заданы $0 < \beta < \alpha$, $0 < p < \gamma/\alpha$ и внешняя мера ν, удовлетворяющая условию*

$$\nu(B) \le c_\nu r_B^{-(\alpha-\beta)p} \mu(B) \quad \textit{для всех шаров} \quad B \subset X,\ r_B \le 1. \tag{8}$$

Тогда для любой функции $f \in M_\alpha^p(X)$ существует такое множество $E \subset X$, что $\nu(E) = 0$ и для всех $x \in X \setminus E$

$$\lim_{r \to +0} r^{-\beta} [f^*(x) - I_{B(x,r)}^{(p)} f] = 0$$

и

$$\lim_{r\to+0} r^{-\beta}[m_f^\delta(B(x,r)) - f^*(x)] = 0, \quad 0 < \delta \le 1/2.$$

Кроме того, при $x \in X \setminus E$

$$\lim_{r\to+0} r^{-\beta} \left(\fint_{B(x,r)} |f - f^*(x)|^q \, d\mu \right)^{1/q} = 0 \quad \text{где} \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\gamma}.$$

Примерами внешних мер, удовлетворяющих условию (8), могут служить емкость $\mathrm{Cap}_{\alpha-\beta,p}$, модифицированная вместимость Хаусдорфа $\mathcal{H}_R^h$ коразмерности $h(t) = t^{(\alpha-\beta)p}$. Классическая вместимость Хаусдорфа $H_R^{\gamma-(\alpha-\beta)p}$ также удовлетворяет этому условию, но лишь локально.

В случае $p \ge \frac{\gamma}{\gamma+\alpha}$ в теореме 3 для $x \in E$ можно утверждать также

$$\lim_{r\to+0} r^{-\beta} \left(\fint_{B(x,r)} f \, d\mu - f^*(x) \right) = 0.$$

и

$$\lim_{r\to+0} r^{-\beta}[I_{B(x,r)}^{(\theta)} f - f^*(x)] = 0, \quad 0 < \theta \le q.$$

Для $p > 1$, классической меры Хаусдорфа и средних f_B утверждение теоремы 3 доказано в [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kinnunen J., Latvala V.* Lebesgue points for Sobolev functions on metric spaces // Rev. Mat. Iberoam. 2002. Vol. 18, № 3. P. 685–700.

2. *Kinnunen J., Tuominen H.* Pointwise behavior of M^{11} Sobolev functions // Math. Zeit. 2007. Vol. 257, № 3. P. 613–630.

3. *Прохорович М. А.* Меры Хаусдорфа и точки Лебега для классов Соболева W_α^p, $\alpha > 0$, на пространствах однородного типа // Матем. заметки. 2009. Т. 84, № 4. С. 616–621.

4. *Heikkinen T., Koskela P., Tuominen H.* Approximation and quasicontinuity of Besov and Triebel – Lizorkin functions. Preprint 2015, arXiv:1505.056 80.

5. *Heikkinen T., Tuominen H.* Approximation by Hölder functions in Besov and Triebel – Lizorkin spaces. Preprint 2015, arXiv:1504.02585.

6. *Karak N.* Generalized Lebesgue points for Sobolev functions. Preprint 2015, arXiv:1506.08026.

7. *Кротов В.Г., Прохорович М. А.* Скорость сходимости средних Стеклова на метрических пространствах с мерой и размерность Хаусдорфа // Матем. заметки. 2011. Т. 89, № 1. С. 145–148.