СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sjölin P.* Convergence almost everywhere of certain singular integrals and multiple Fourier series // Arkiv Matem. 1971. Vol. 9, № 1. P. 65–90.

2. *Kojima M.* On the almost everywhere convergence of rectangular partial sums of multiple Fourier series // Sci. Repts. Kanazawa Univ. 1977. Vol. 22, № 2. P. 163–177.

3. *Fefferman C.* On the divergence of multiple Fourier series // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 77, № 2. P. 191–195.

4. *Bloshanskii I. L., Grafov D. A.* Sufficient conditions for convergence almost everywhere of multiple trigonometric Fourier series with lacunary sequence of partial sums // Real Analysis Exchange. (принято к печати).

5. *Никишин Е. М.* Множители Вейля для кратных рядов Фурье // Матем. сб. 1972. Т. 89, № 2. С. 340–348.

УДК 517.51

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ КОНСЕРВАТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

Д. И. Бойцов, С. П. Сидоров (Саратов, РФ)

dmitriy.boytsov@gmail.com, sidorovsp@info.sgu.ru

Условия сходимости последовательностей линейных положительных операторов $\{K_n\}_{n\geq 1}$ к тождественному оператору в пространстве непрерывных функций были найдены П. П. Коровкиным [1, 2]. Количественные результаты об оценке скорости сходимости $K_n f$ к f были получены в работе [3]. Развивая идеи и результаты работ [4–6], в настоящей статье мы получаем некоторые количественные результаты по оценке скорости сходимости для последовательностей формосохраняющих операторов.

Пусть X есть компактное подмножество $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^X$ есть пространство всех действительнозначных функций, определенных на X. Пусть B есть подмножество $\mathbb{R}^X$, A есть подпространство $C(X)$, $A \subset B$. Пусть $L : B \to \mathbb{R}^X$ есть линейный оператор, такой, что $L(A) \subset C(X)$.

Пусть $P = \{f \in B : \ Lf \geq 0\}$ есть конус в A. Пусть $U = \mathrm{span}\ \{u_i\}_{i\in I}$ есть подпространство A, удовлетворяющее следующим условиям:

1) существует элемент $u \in U$, такой, что $Lu(t) = 1$ для всех $t \in X$;

2) существует элемент $v \in U$, такой, что $Lv(t) = t$ для всех $t \in X$;

3) существуют такие функции $\{a_i\}_{i\in I}$, определенные на X, такие, что для всех $t, x \in X$ выполнено неравенство $Lg_x(t) \geq cLh_x(t)$, $Lg_x(x) = 0$, где $g_x := \sum_{i\in I} a_i(x)u_i$, c есть положительное действительное число, не зависящее от x и t, и h_x удовлетворяет $Lh_x(t) = (t-x)^2$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00140).

Теорема. *Пусть $\{K_n\}_{n\geq 1}$, $K_n : A \to B$, есть последовательность линейных операторов, удовлетворяющих $K_n(P) \subset P$ для всех $n \geq 1$. Тогда для всякой $f \in A$ и любого $n = 1, 2, \ldots$ будет*

$$|(Lf - L(K_n f))(x)| \leq |Lf(x)| \cdot |(L(K_n u) - Lu)(x)| +$$
$$+\delta_n^{-1}|(L(K_n v) - Lv)(x)|\omega_1(Lf, \delta_n) + |L(K_n u)(x) + \gamma_n^2(x)\delta_n^{-2}| \cdot \omega_2(Lf, \delta_n),$$

где $\gamma_n^2(x) = c^{-1}L(K_n g_x)(x)$.

Говорят, что функция $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ является k-выпуклой, $k \geqslant 1$, на $[0,1]$, если для произвольно выбранных $k+1$ различных точек $t_0, \ldots, t_k$ из $[0,1]$, имеет место неравенство

$$[t_0, \ldots, t_k]f \geqslant 0,$$

где $[t_0, \ldots, t_k]f$ означает разделенную разность порядка k функции f по узлам $0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_k \leqslant 1$. Функция f является 0-выпуклой, если $f(t_0) \geqslant 0$ для произвольного $t_0 \in [0,1]$.

Обозначим $C^k[0,1]$, $k \geqslant 0$, пространство всех действительнозначных k раз непрерывно дифференцируемых функций, определенных на $[0,1]$. Пусть D^k будет оператором дифференцирования порядка k, т.е. $D^k f(x) = \frac{d^k f(x)}{dx^k}$. Обозначим Δ^k конус всех k-выпуклых функций, определенных на $X = [0,1]$. Обозначим $e_i(x) = x^i$, $i = 1, 2, \ldots$.

Следствие (см. [4, 8]). *Пусть $L_n : C^k[0,1] \to C^k[0,1]$, $n \geqslant 1$, есть последовательность линейных операторов таких, что $L_n(\Delta^k) \subset \Delta^k$. Тогда для всякой $f \in C^k(X)$ и для любых $x \in (0,1)$, $\delta_n > 0$, справедливо неравенство*

$$|D^k f(x) - D^k L_n f(x)| \leq \frac{1}{k!}|D^k f(x)||D^k e_k(x) - D^k L_n e_k(x)| +$$
$$+\delta_n^{-1}\left|D^k L_n\left(\frac{1}{(k+1)!}e_{k+1} - \frac{1}{k!}xe_k\right)(x)\right|\omega_1(D^k f, \delta_n) +$$
$$+\left(\frac{1}{k!}D^k L_n e_k(x) + \delta_n^{-2}\beta_n^2(x)\right)\omega_2(D^k f, \delta_n), \quad (1)$$

где

$$\beta_n^2(x) = \frac{1}{2}D^k L_n\left(\frac{2}{(k+2)!}e_{k+2} - \frac{2}{(k+1)!}xe_{k+1} + \frac{1}{k!}x^2 e_k\right)(x).$$

При $k = 0$ получаем результат [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Korovkin P. P.* Linear Operators and Approximation Theory. Delhi : Hind. Publ. Comp., 1960.

2. *Коровкин П. П.* О сходимости линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций // ДАН СССР. 1953. Т. 90, № 5. С. 961–964.

3. *Shisha O., Mond B.* The degree of convergence of linear positive operators // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 1968. Vol. 60. P. 1196–1200.

4. *Gonska H. H.* Quantitative Korovkin type theorems on simultaneous approximation // Math. Z. 1984. Vol. 186. P. 419–433.

5. *Knoop H.-B., Pottinger P.* Ein satz vom Korovkin-typ fur C^k raume // Math. Z. 1976. Vol. 148. P. 23–32.

6. *Muñoz-Delgado F. J., Ramírez-González V., Cárdenas-Morales D.* Qualitative Korovkin-Type Results on Conservative Approximation // J. Approx. Theory. 1998. Vol. 94. P. 144–159.

7. *Păltănea R.* Best constants in estimates with second order moduli of continuity // Approx. Theory. (Proc. Int. Dortmund meeting on Approx. Theory 1995, ed. by M. W. Müller et al.). Berlin : Akad. Verlag 1995. P. 251–275.

8. *Kacsó D. P.* Simultaneous approximation by almost convex operators // Rend. Circ. Mat. Palermo. 2002. Suppl. 68 (2), pt. II. P. 523–538.

517.5

ТОНКИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ ХАЙЛАША – СОБОЛЕВА M^p_α ПРИ $p > 0$. ТОЧКИ ЛЕБЕГА

С. А. Бондарев, В. Г. Кротов (Минск, Беларусь)
bondarevSA@bsu.by, krotov@bsu.by

Пусть (X, d, μ) — метрическое пространство с метрикой d и регулярной борелевской мерой μ. Шары, порожденные метрикой d, обозначаем так:

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

Будем предполагать, что мера μ удовлетворяет условию удвоения с показателем $\gamma > 0$: для некоторой постоянной a_μ выполнено неравенство

$$\mu(B(x, R)) \le a_\mu \left(\frac{R}{r}\right)^\gamma \mu(B(x, r)), \quad x \in X,\ 0 < r \le R.$$

Для функции $f \in L^p(X)$ обозначим через $D_\alpha[f]$ класс всех неотрицательных μ-измеримых функций g, для каждой из которых существует такое множество $E \subset X$, $\mu(E) = 0$, что

$$|f(x) - f(y)| \le \big[d(x, y)\big]^\alpha [g(x) + g(y)], \quad x, y \in X \setminus E.$$

Элементы $D_\alpha[f]$ называются α-градиентами функции f.