УДК 517.518

ПОВЕДЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ ПО ЛОКАЛИЗОВАННОЙ СИСТЕМЕ ХААРА ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ [1]

Е. С. Белкина (Петрозаводск, РФ)
elena.belkina@gmail.com
Ю. В. Малыхин (Москва, РФ)
jura05@yandex.ru

Положим $\Delta_{k,i} = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right)$; через $\Delta^+_{k,i}$ и $\Delta^-_{k,i}$ обозначим левую и правую половины интервала $\Delta_{k,i}$, соответстветственно.

Определим функции локализованной системы Хаара на $[0,1]^2$ следующим образом (см. рис. 1): $\chi_0(x,y) \equiv 1$ на $[0,1]^2$; для $k = 0,1,2,\ldots$ пачка номер k состоит из функций

$$\chi^{(1)}_{k,i,j}(x,y) = \begin{cases} 2^k, & x \in \Delta^+_{k,i},\ y \in \Delta_{k,j}, \\ -2^k, & x \in \Delta^-_{k,i},\ y \in \Delta_{k,j}, \\ 0, & (x,y) \notin \overline{\Delta_{k,i}} \times \overline{\Delta_{k,j}}, \end{cases}$$

$$\chi^{(2)}_{k,i,j}(x,y) = \chi^{(1)}_{k,j,i}(y,x),$$

$$\chi^{(3)}_{k,i,j}(x,y) = 2^{-k}\chi^{(1)}_{k,i,j}(x,y)\chi^{(2)}_{k,i,j}(x,y).$$

При этом $i,j = 1,2,\ldots,2^k$. В граничных точках функции доопределяются нужным образом. Параметр $t \in \{1,2,3\}$ назовём *типом* функции.

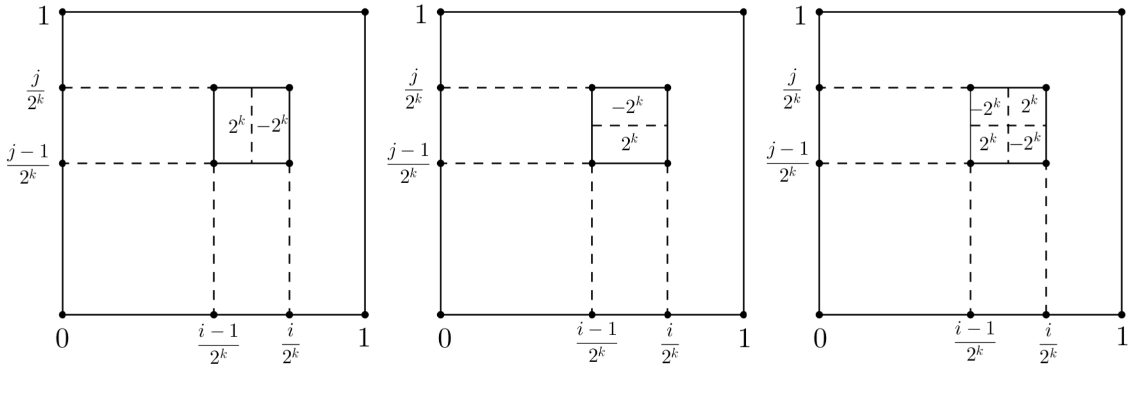

Рис. 1. Локализованная система Хаара

[1]Работа Ю. В. Малыхина поддержана РФФИ (проект № 14-01-00332).

Каждой суммируемой функции соответствуют ее коэффициенты Фурье – Хаара:

$$c^{(t)}_{k,i,j}(f) = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x,y)\chi^{(t)}_{k,i,j}(x,y)\,dxdy.$$

В случае классической системы Хаара известно (см., например, [1]), что для любой функции $f \in C[0,1]$ либо

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, 2^{3k/2}\max_i |c_{k,i}(f)| > 0,$$

либо $f \equiv \mathrm{const}$. В случае системы $\{\chi^{(t)}_{k,i,j}\}$ П. В. Глебов доказал, что для $f \in C[0,1]^2$ либо

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, 4^k \max_{i,j,t} |c^{(t)}_{k,i,j}(f)| > 0,$$

либо $f \equiv \mathrm{const}$. Точнее, он доказал, что из убывания коэффициентов 1-го типа со скоростью $o(4^{-k})$ следует, что f не зависит от x (и тогда эти коэффициенты нулевые). Итак, для любой функции $f \in C[0,1]^2$ имеет место одна из следующих возможностей:

- если $f(x,y) = g(x) + h(y)$, то всё сводится к классической системе Хаара:

$$c^{(1)}_{k,i,j}(f) = 2^{-k/2}c_{k,i}(g), \quad c^{(2)}_{k,i,j}(f) = 2^{-k/2}c_{k,j}(h), \quad c^{(3)}_{k,i,j}(f) = 0;$$

- если функция не представима в виде $f(x,y) = g(x) + h(y)$, то:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, 4^k \max_{i,j} |c^{(t)}_{k,i,j}| > 0, \quad t = 1,2.$$

Тем самым, поведение коэффициентов непрерывных функций было описано, за исключением коэффициентов третьего типа для $f(x,y) \neq g(x) + h(y)$. Рассмотрим этот случай. Для гладкой функции $f \in C^2[0,1]^2$ найдётся точка, в которой $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq 0$, откуда следует, что коэффициенты третьего типа не могут убывать со скоростью $o(8^{-k})$. Для кусочно-линейных функций коэффициенты убывают не быстрее чем 4^{-k}. Тем не менее, справедлива следующая теорема.

Теорема. *Существует непрерывная функция f^* на $[0,1]^2$, не представимая в виде $g(x) + h(y)$, для которой $c^{(3)}_{k,i,j}(f^*) = 0$ при всех k, i, j.*

Функция f^* имеет фрактальную структуру (рис. 2).

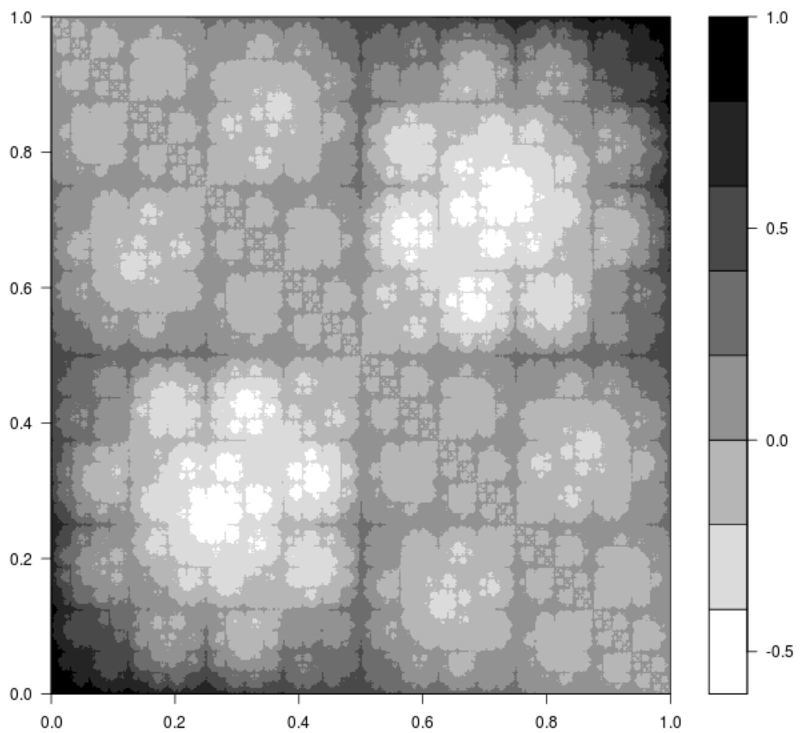

Рис. 2. Функция f^*

Опишем кратко построение этой функции. Рассматривается пространство $C^\circ \subset C[0,1]^2$ функций f, удовлетворящих свойствам (i) $f(0,0) = f(1,1) = 1$, $f(0,1) = f(1,0) = 0$ и (ii) f линейна на сторонах квадрата $[0,1]^2$. Строится отображение "самоподобия" $T\colon C^\circ \to C^\circ$: значение Tf на квадрате $[0,\frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2},1]$ получается из f на $[0,1]^2$ делением пополам, то есть $Tf(x,y) = \frac{1}{2}f(2x,2y-1)$; так же для $[\frac{1}{2},1] \times [0,\frac{1}{2}]$; на оставшихся двух квадратах определение Tf аналогичное, но несколько более сложное. Непрерывная «склейка» значений на разных квадратах достигается за счёт свойств (i) и (ii). Отображение T оказывается сжимающим и в качестве f^* берётся его неподвижная точка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. Изд. 2-е, доп. М. : Изд-во АФЦ, 1999. 560 с.