Полученная теория дает возможные перспективы применения симметрических конструкций в теории экстремальных задач. А именно, после нахождения экстремума с помощью несимметрических субдифференциалов, мы применяем симметрические конструкции с целью классификации экстремумов (асимметрия, эксцесс).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Орлов И. В.* Введение в сублинейный анализ // СМФН. 2014. Т. 53. С. 64–132.

2. *Орлов И. В., Баран И. В.* Введение в сублинейный анализ — 2: симметрический вариант // СМФН. 2015. Т. 57. С. 108–161.

3. *Орлов И. В., Халилова З. И.* Компактные субдифференциалы в банаховых пространствах и их применение к вариационным функционалам // СМФН. 2013. Т. 59. С. 99–131.

4. *Орлов И. В., Стонякин Ф. С.* Компактные субдифференциалы: формула конечных приращений и смежные результаты // СМФН. 2009. Т. 34. С. 121–138.

УДК 517.51

О КЛАССАХ ФУНКЦИЙ ПОЛНОЙ И НЕПОЛНОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ Λ-ВАРИАЦИИ[1]

А. Н. Бахвалов (Москва, РФ)

an-bakh@yandex.ru

Мы будем называть последовательность неотрицательных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ допустимой, если она стремится к бесконечности, монотонна (хотя бы начиная с некоторого номера n_0), а ряд из $(\lambda_n)^{-1}$ расходится. Напомним, что для допустимой последовательности Λ и функции m переменных $f(x)$ ее Λ-вариацией $V_\Lambda^{x_{j_1},\ldots,x_{j_k}}(f,\Delta)$ по непустому набору переменных $(x_{j_1},\ldots,x_{j_k})$ на промежутке $\Delta = \Delta^1 \times \cdots \times \Delta^m$ называется величина

$$\sup_{x_{l_i}\in\Delta^{l_i}} \sup_{\{I_{n_i}^{j_i}\}} \sum_{n_1,\ldots,n_k} \frac{|f(I_{n_1}^{j_1} \times \cdots \times I_{n_k}^{j_k}, x_{l_1},\ldots,x_{l_{m-k}})|}{\lambda_{j_1}\ldots\lambda_{j_k}},$$

где $f(I_{n_1}^{j_1} \times \cdots \times I_{n_k}^{j_k}, x_{l_1},\ldots,x_{l_{m-k}})$ есть смешанная разность f на k-мерном промежутке $I_{n_1}^{j_1} \times \cdots \times I_{n_k}^{j_k}$ как функции от $x_{j_1},\ldots,x_{j_k}$ при фиксированных значениях остальных переменных $x_{l_1} \in \Delta^{l_1},\ldots,\ x_{l_{m-k}} \in \Delta^{l_{m-k}}$, а внутренний супремум берется по системам попарно непересекающихся интервалов $\{I_{n_i}^{j_i}\}$ на Δ^{j_i}.

Сумма таких вариаций по всем непустым наборам переменных называется полной Λ-вариацией, а класс функций, для которых она конечна,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00350).

обозначается через $\Lambda BV(\Delta)$. Если же при этом полная вариация по последовательностям $\Lambda_N = \{\lambda_n\}_{n=N+1}^{\infty}$ стремится к нулю при $N \to \infty$, то такая функция называется непрерывной по Λ-вариации. В частности, допустимой является последовательность $H = \{n\}_{n=1}^{\infty}$, а соответствующая вариация называется гармонической.

Классы функций трех и более переменных, имеющие ограниченную полную Λ-вариацию, были впервые рассмотрены А. И. Саблиным [1]. В работе автора [2] было доказано, что если непрерывная функция функция f принадлежит классу $CHV(\mathbb{T}^m)$ функций, непрерывных по гармонической вариации ($\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$), то ее ряд Фурье равномерно сходится к ней по Прингсхейму, а для функций из класса $HBV(\mathbb{T}^m)$, $m \geq 3$, это неверно.

У. Гогинава и А. Саакян в серии работ изучали классы функций ограниченной частичной Λ-вариации $P\Lambda BV(\mathbb{T}^m)$, т. е. такие классы, в которых на функцию накладывается лишь условие равномерной ограниченности Λ-вариации по (каждой) одной переменной как функции остальных переменных. Ими получены результаты о вложении таких классов в класс $CHV(\mathbb{T}^m)$, что позволяет сделать вывод о равномерной сходимости ряда Фурье по Прингсхейму.

В частности, ими [3] был установлен следующий результат:

Теорема. *Пусть допустимая последовательность* $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такова, что*

$$\frac{\lambda_n}{n} \downarrow 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty, \quad \textit{а} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n \ln^{m-2}(n+1)}{n^2} < \infty.$$

Тогда класс $P\Lambda BV(\mathbb{T}^m)$ *вкладывается в класс* $CHV(\mathbb{T}^m)$.

С другой стороны, ими в этой же работе было доказано, что если для некоторого $\delta > 0$

$$\frac{\lambda_n}{n} = O\left(\frac{\lambda_{[n\delta]}}{[n\delta]}\right) \quad \text{при} \quad n \to \infty, \quad \text{а} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n \ln^{m-2}(n+1)}{n^2} = \infty,$$

то класс $P\Lambda BV(\mathbb{T}^m)$ не вкладывается в класс $CHV(\mathbb{T}^m)$.

В частности, если $\Lambda = \{n \ln^a(n+1)\}$, то вложение имеет место при $a < 1 - m$ и не имеет места при $a \geq 1 - m$.

Пусть $k \in \{1, \ldots, m\}$. Обозначим через $P_k\Lambda BV(\mathbb{T}^m)$ класс тех функций, для которых конечны все вариации по не более чем k переменным. В частности, $P_1\Lambda BV(\mathbb{T}^m) = P\Lambda BV(\mathbb{T}^m)$, а $P_m\Lambda BV(\mathbb{T}^m) = \Lambda BV(\mathbb{T}^m)$.

Нами установлен следующий основной результат, при $k = 1$ соответствующий результату Гогинавы и Саакяна:

Теорема 1. *Пусть $k \in \{2, \dots, m-1\}$, а допустимая последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что*

$$\frac{\lambda_n}{n} \downarrow 0 \quad \text{и} \; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_n)^k \ln^{m-k-1}(n+1)}{n^{k+1}} < \infty.$$

Тогда класс $P_k\Lambda BV(\mathbb{T}^m)$ вкладывается в класс $CHV(\mathbb{T}^m)$.

В частности, если $\Lambda = \{n \ln^a(n+1)\}$, то включение имеет место при $a < 1 - \frac{m}{k}$. С другой стороны, мы строим следующий

Пример. Пусть $k \in \{2, \dots, m-1\}$. Если $\Lambda = \{n \ln^a(n+1)\}$, где $a > 1 - \frac{m}{k}$, то класс $P_k\Lambda BV(\mathbb{T}^m)$ не вкладывается в класс $HBV(\mathbb{T}^m)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Саблин А. И.* Λ-вариация и ряды Фурье // Изв. вузов. Матем. 1987. № 10. С. 66–68.

2. *Бахвалов А. Н.* Непрерывность по Λ-вариации функций многих переменных и сходимость кратных рядов Фурье // Матем. сб. 2002. Т. 193, № 12. С. 3–20.

3. *Goginava U., Sahakian A.* On the convergence of multiple Fourier series of functions of bounded partial generalized variation // Anal. Math. 2013. Vol. 39, № 1. P. 45–56.

УДК 517.982.256 + 515.124.4

ЛИПШИЦЕВЫ ВЫБОРКИ ИЗ ОТОБРАЖЕНИЯ ШТЕЙНЕРА[1]

Б. Б. Беднов, К. В. Чеснокова (Москва, РФ)
noriiii@inbox.ru, kchesnokova@gmail.com

Пусть в действительном банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|)$ для произвольного набора $\{x_1, \dots, x_n\}$, $n \geqslant 3$, множество точек Штейнера

$$\mathrm{st}(x_1, \dots, x_n) = \left\{ s \in X \colon \sum_{k=1}^{n} \|x_k - s\| = \inf_{x \in X} \sum_{k=1}^{n} \|x_k - x\| \right\}$$

непусто (например, X конечномерно или рефлексивно).

Рассмотрим отображение st_n пространства $X \times \dots \times X$ (n раз) с нормой $\|(x_1, \dots, x_n)\|_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \|x_i\|$, сопоставляющее набору $\{x_1, \dots, x_n\}$ множество $\mathrm{st}(x_1, \dots, x_n)$. J.-P. Kahane показал, что в случае евклидовой плоскости X отображение st_n липшицево при $n = 3$, а при $n = 2k+1$, $k \geqslant 2$, — не липшицево [1].

Гиперплоскость L называется *опорной* к единичному шару $B(X)$ пространства X в точке x_0 единичной сферы $S(X)$, если $x_0 \in L$ и

[1]Работа поддержана грантами РФФИ (проекты № 14-01-00510, № 15-01-08335).