УДК 517.958

ОБ ОСНОВНЫХ МАТРИЦАХ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА В СИСТЕМАХ, МОДЕЛИРУЕМЫХ ГРАФОМ

Ю. В. Афанасенкова, Ю. А. Гладышев (Калуга, РФ)
dvoryanchikova_y@mail.ru

Основной задачей настоящего сообщения является сравнительная характеристика трех основных матриц P, R, K, используемых при решении краевых задач теории переноса, в системах моделируемых геометрических графом. Например, в системах, состоящих из достаточно тонких по сравнению с линейными размерами стержней. Это условие позволяет считать процесс переноса в каждом стержне одномерным. В дальнейшем, используя терминологию теории графов будем называть стержень - ребром, а точки контакта — вершинами. Считаем далее, что уравнение для потенциала $\Phi(x)$ стационарного процесса переноса задано на каждом ребре графа и приведено к виду [1]

$$\alpha_2 \frac{d}{dx}(\alpha_1 \frac{d\Phi}{dx}) - m^2\Phi = D_2 D_1 \Phi - m^2 \Phi = 0,$$

где α_2, α_1 — непрерывные, положительные функции на данном ребре, определяющие физические и геометрические свойства ребра. Константа m учитывает наличие внешнего обмена по длине ребра переносимой величины при постоянном внешнем потенциале и принята за ноль. Если m->0, то внешний обмен исключается. При необходимости номер ребра ставится в верху в скобках, например $\Phi^{(i)}$. Используя аппарат обобщенных степеней Берса [2] решение первой краевой задачи для ребра с координатами x_1, x_2

$$\Phi(x)|_{x_1} = \Phi_1, \Phi(x)|_{x_2} = \Phi_2,$$

запишем

$$\Phi(x) = \Phi_1 \frac{\operatorname{sh} mX(x,x_2)}{\operatorname{sh} mX(x_1,x_2)} + \Phi_2 \frac{\operatorname{sh} mX(x,x_1)}{\operatorname{sh} mX(x_2,x_1)}.$$

Если определить поток J как

$$J = -D_1 \Phi, \tag{1}$$

то значения потенциалов Φ_1, Φ_2 и потоков J_1, J_2 в конечных точках ребра x_1, x_2 связаны линейной зависимостью

$$J_i = \sum P_{ik} J_k.$$

Элементы p_{ij} матрицы P, которую назовем матрицей потоков, определены как

$$p_{11} = -\frac{m \operatorname{ch} mX(x_1, x_2)}{\operatorname{sh} mX(x_1, x_2)}, \quad p_{12} = -\frac{m}{\operatorname{sh} mX(x_1, x_2)},$$
$$p_{21} = -\frac{m}{\operatorname{sh} mX(x_1, x_2)}, \quad p_{22} = -\frac{m \operatorname{ch} mX(x_2, x_1)}{\operatorname{sh} mX(x_2, x_1)},$$

При последовательном соединении двух ребер с координатами (x_1, x_2) и (x_2, x_3) в один отрезок матрица ребра (x_1, x_3) определена как

$$P_{11}^{(3)} = P_{11}^{(1)} + \frac{1}{\Delta} P_{12}^{(1)} P_{21}^{(1)}, \quad P_{12}^{(3)} = -\frac{1}{\Delta} P_{12}^{(1)} P_{12}^{(2)},$$

$$P_{21}^{(3)} = \frac{1}{\Delta} P_{21}^{(1)} P_{21}^{(2)}, \quad P_{22}^{(3)} = P_{22}^{(2)} - \frac{1}{\Delta} P_{21}^{(2)} P_{12}^{(2)}, \tag{2}$$

где $\Delta = P_{11}^{(2)} - P_{22}^{(1)}$.

Обозначим эту операцию $*$

$$P_1(1,2) * P_2(2,3) = P_3(1,3),$$

Относительно этой операции, которая является однозначной, можно высказать ряд утверждений. Операция некоммутативна, но обладает свойством ассоциативности при последовательном умножении более двух матриц. При поставленных условиях положительности функций порождающей пары α_1, α_2, m не существует обратного элемента, но единичный элемент условно можно записать

$$E = \begin{pmatrix} \propto & -\propto \\ \propto & -\propto \end{pmatrix}.$$

Матрица P для ребра была использована для построений решений краевыхх задач на графе [3], в том числе при краевых условиях третьего типа.

Решение второй краевой задачи для потенциала запишем

$$\Phi = -J_1 \frac{\operatorname{ch} mX(x, x_2)}{m \operatorname{sh} m\tilde{X}(x_1, x_2)} - J_2 \frac{\operatorname{ch} mX(x, x_1)}{m \operatorname{sh} m\tilde{X}(x_2, x_1)}.$$

Следовательно, имеем согласно определению (1) для потока выражение

$$J = J_1 \frac{\operatorname{sh} m\tilde{X}(x, x_2)}{m \operatorname{sh} m\tilde{X}(x_1, x_2)} + J_2 \frac{\operatorname{sh} m\tilde{X}(x, x_1)}{m \operatorname{sh} m\tilde{X}(x_2, x_1)}.$$

Матрица R определяет связь потенциалов $\Phi_1,\ \Phi_2$ и потоков $J_1,\ J_2$ на концах стержня

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^{2} r_{ik} J_k,\ i = 1, 2.$$

Назовем ее матрицей потенциалов.

Для элементов матрицы R имеем

$$r_{11} = -\frac{\operatorname{ch} mX(1,2)}{m \operatorname{sh} m\tilde{X}(1,2)}, \qquad r_{12} = -\frac{1}{m \operatorname{sh} m\tilde{X}(2,1)},$$

$$r_{21} = -\frac{1}{m \operatorname{sh} m\tilde{X}(1,2)}, \quad r_{22} = -\frac{\operatorname{ch} mX(2,1)}{m \operatorname{sh} m\tilde{X}(2,1)}.$$

Если внешнего обмена нет $m- > 0$, то возвращаемся к понятию обычного сопротивления.

Для нахождения результата вычтем Φ_1, и Φ_2 при условии $J_1 = J_2 = J$

$$\Phi_2 - \Phi_1 = (r_{21} + r_{22} - r_{11} - r_{12})J.$$

Действуя аналогично нахождению матрицы P для последовательного соединения двух ребер введем операцию умножения матриц $R^{(1)},\ R^{(2)}$ двух отрезков $(x_1, x_2), (x_2, x_3)$

$$R^{(3)}(x_1, x_3) = R^{(2)}(x_3, x_2) * R^{(1)}(x_2, x_1)$$

по правилам

$$r_{11}^{(3)} = r_{11}^{(1)} - \frac{1}{\Delta} r_{12}^{(1)} r_{21}^{(1)}, \quad r_{12}^{(3)} = \frac{1}{\Delta} r_{12}^{(1)} r_{12}^{(2)},$$

$$r_{21}^{(3)} = -\frac{1}{\Delta} r_{21}^{(1)} r_{21}^{(2)}, \quad r_{22}^{(3)} = r_{22}^{(2)} + \frac{1}{\Delta} r_{21}^{(2)} r_{12}^{(2)}, \tag{3}$$

где $\Delta = r_{11}^{(2)} - r_{22}^{(1)}$.

Легко увидеть почти полное сходство определений (2) и (3). Это связано с тем, как это было показано, что матрица R обратна P [3], даже при неоднородных внешних условиях.

Введение матрицы K связано с решением задачи Коши, когда заданы $\Phi(x_1), J(x_1)$ и для $\Phi(x), J(x)$ найдем

$$\begin{cases} \Phi(x) = \Phi_1 \operatorname{ch} mX(x, x_1) - J_1 \frac{1}{m} \operatorname{sh} mX(x, x_1), \\ J(x) = -\Phi_1 m \operatorname{sh} m\tilde{X}(x, x_1) + J_1 \operatorname{ch} m\tilde{X}(x, x_1). \end{cases}$$

Этот результат в матричной форме

$$V^{(1)}(x, x_1) = K(x, x_1) V^{(0)}(x_1)$$

запишем, если введем вектор-столбцы $V^{(1)}(x, x_1)$, $V^{(0)}(x_1)$ и матрицу $K(x, x_1)$:

$$V^{(1)}(x, x_1) = \begin{pmatrix} \Phi \\ J \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} mX & -\frac{1}{m} \operatorname{sh} mX \\ -m \operatorname{sh} m\tilde{X} & \operatorname{ch} m\tilde{X} \end{pmatrix}, V^{(0)}(x_1) = \begin{pmatrix} \Phi(x_1) \\ J(x_1) \end{pmatrix}.$$

Удобным свойством матрицы K является тот факт, что при идеальном контакте матрицы K для последовательного соединения ребер находится по обычному закону матричного умножения

$$K^{(3)}(x_3, x_1) = K^{(2)}(x_3, x_2) K^{(1)}(x_2, x_1).$$

Поэтому эта матрица удобна при решении задач переноса в многослойной среде. Отметим, что матрица K связана с матрицей P простыми соотношениями

$$p_{11} = -\frac{k_{11}}{k_{12}}, \quad p_{12} = \frac{1}{k_{12}}, \quad p_{21} = k_{21} - \frac{k_{11} k_{22}}{k_{12}}, \quad p_{22} = -\frac{k_{22}}{k_{12}}.$$

Приложения матрицы K для решения краевых задач затруднено неопределенностью постановки задачи Коши на графе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Афанасенкова Ю. В., Гладышев Ю. А., Куликов А. Н.* Краевые задачи двумерной модели процессов переноса в многослойных средах // Вестн. Калуж. ун-та. 2013. № 3–4. С. 7–11;

2. *Гладышев Ю. А.* Метод обобщенных степеней Берса и его приложения в математической физике. Калуга, 2011.

3. *Гладышев Ю. А., Афанасенкова Ю. В.* Об использовании матрицы потоков и матрицы потенциалов при решении задач теории переноса // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 16-й Сарат. зим. шк. Саратов: ООО Изд-во «Научная книга», 2012. С. 49–51.