УДК 510: 53.072: 621.1.016.4(03)

СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФФУЗИОННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Р. В. Арутюнян (Реутов, М.О., РФ)
rob57@mail.ru

Рассматривается структура типа одномерного «решета». Длина отверстий (дырок) равна 1, а непроницаемой части — 2. Сквозь решето просеивается поток одномерных частиц (палок) случайных размеров z с плотностью $p(z), z \in (0,2]$. Искомыми являются плотности распределения размеров дырок и палок на выходе из «решета» $C(x,t)$ и $\psi(z,t)$, для которых получена система уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t}(x,\ t) = -q\,(x)\,C\,(x,\ t) + \int\limits_x^1 P\,(y-x)\,C\,(y,\ t)\,dy,\ \forall\ x \in (0,1)\ \forall\ t > 0;$$

$$\frac{\partial C_0}{\partial t}(t) = \int\limits_0^1 C\,(y,t) \int\limits_y^2 \frac{z-y}{3} p\,(z)\ dz\,dy, \quad \forall\ t > 0,$$

$$C(x,0) = \delta(x-1+0), \quad \forall\ x \in (0,1];$$

$$C_0(0) = 0; \quad P\,(w) = \frac{2}{3}\int\limits_{2w}^2 p\,(z)\,dz, \quad 0 \le w \le 1;$$

$$q\,(x) = \frac{2}{3}\left[\int\limits_0^x \frac{z}{2}P\,(z)\,dz + \int\limits_x^{2x} \frac{2z-x}{2}P\,(z)\,dz + \int\limits_{2x}^2 \frac{z+x}{2}P\,(z)\,dz\right],\ \forall\ x \in (0,1);$$

$C_0(t)$ — вероятность нуль-дырки, $C\,(x,t) = C_1\,(x,t) + \delta\,(x-1+0)\,e^{-q(1)t}$;

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = -q\,(x)\,C_1 + \int\limits_x^1 P\,(y-x)\,C_1\,(y,t)\,dy + P\,(1-x)\,e^{-q(1)t}, \quad t > 0,$$

$$C_1(x,0) = 0, \quad \forall\ x \in (0,1];$$

$$\phi\,(z,t) = p\,(z)\int\limits_{z/2}^1 R\,(y,z)\,C\,(y,t)\,dy, \quad \forall\ z \in [0,2),\ t > 0,$$

$$R\,(y,z) = (2y-z)/3, \quad z/2 \le y \le \min(z,1);$$

$$R\,(y,\ z) = y/3, \quad \min(z,1) < y \le 1.$$

Подстановка $C_1(x,t) = A(x,t)\, e^{-q(1)t}$ приводит к уравнению:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -Q(x)\, A + \int\limits_x^1 P(y-x)\, A(y,t)\, dy + P(1-x),$$
$$A(x,0) = 0, \quad \forall\, x \in (0,1],$$
$$Q(x) = q(1) - q(x).$$

Свойство 1. *Если плотность распределения $p(z)$ непрерывна на отрезке $[0,2]$, то решение стохастической системы существует, единственно, причем $C_0(t) \in C^\infty(0,\infty)$, $\dfrac{\partial^k C}{\partial t^k}(x,t) \in C^1(0,1)$, $\forall\ t > 0$, $k = 0,1,...$*

Свойство 2. *Имеют место оценки снизу*

$$C_1(x,\ t) \geq P(1-x)\, \frac{e^{-q(x)t} - e^{-q(1)t}}{q(1) - q(x)} \geq P(1-x)\, \frac{e^{-q(1)t} - e^{-q_{\max}t}}{q_{\max} - q(1)},$$

$$\forall\ x \in [0,1], \quad t \geq 0, \quad q_{\max} = \|q\|_{C(0,1)}$$

Свойство 3. *Справедлива оценка сверху*

$$C_1(x,\ t) \leq \frac{(3/2)^{3/4}}{3\sqrt{\pi}} \frac{t^{1/4}}{(1-x)^{3/2}} e^{-q_{\min}t + 2\sqrt{\frac{2}{3}(1-x)t}}, \quad \forall\ x \in [0,1],\ t \geq 0,$$

$$q_{\min} = \min_{[0,1]} q(x).$$

Свойство 4. *Условие нормировки*

$$_0(t) + \int\limits_0^1 C_1(x,\ t)\, dx = 1, \quad \forall\ t \geq 0.$$

На конечных интервалах $(0,T)$, где $T > 0$ — величина порядка постоянной времени процесса, одним из эффективных способов решения стохастических уравнений является применение МКР. Схема 1-го порядка:

$$\frac{B_i^{j+1} - B_i^j}{\tau} = -a_i B_i^j + \sum_{k=1}^{i} P_{i-k} B_k^j h + R_i^j, \quad i = \overline{1,\ M};$$

$$B_0^j = P_0 t_j e^{-q_0 t_j}; \quad a_i = q(1 - z_i); \quad P_i = P(z_i), \quad z_i = ih; \quad R_i^j = P_i e^{-q_0 t_j};$$

$$C_1(z_i,t_j)=B^j_{m-i}(1+o(1)),\quad \tau,h\to 0,\quad i=\overline{0,M};\quad h=\frac{1}{M};$$

$$t_j=j\tau;\quad j=\overline{0,J};\quad J=\left[\frac{T}{\tau}\right].$$

Устойчивость схемы:

$$\left\|B_h^{(1)}-B_h^{(2)}\right\|_h\le\gamma\left\|R_h^{(1)}-R_h^{(2)}\right\|_h,$$

$$\gamma=\frac{e^{\omega T}-1}{\omega},\quad \omega=\|P\|_{C(0,\,1)}-q_{\min},\quad \|B_h\|_h=\max_{\Omega}\left|B_i^j\right|,$$

$$\Omega=\left\{(i,\ j):\ i=\overline{0,M};\ j=\overline{0,J}\right\},$$

$$\left|C_1(z_i,\ t_j)-B^j_{m-i}\right|\le f_4\tau+f_5h,\quad \forall\ (i,j)\in\Omega.$$

Тестовая задача при $q(x)=\dfrac{1+(1-x)}{6}$, $P(x)=\dfrac{2}{3}$, на рис. 1 параметры схемы $h=0.025$, $\tau=0.5$, $a_1(x,\ t)=A_h(x,\ t)/\|A_h\|_h$, $a_2(x,t)=A(x,t)\,\|A_h\|$, на рис. 2 параметры схемы $h=0.025$, $\tau=0.3$, $a_3(x,t)=A_h(x,t)/\|A_h\|_h$.

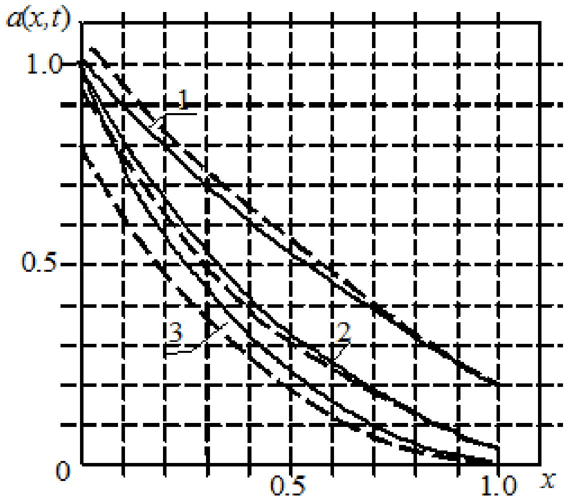

Рис. 1. Точное решение

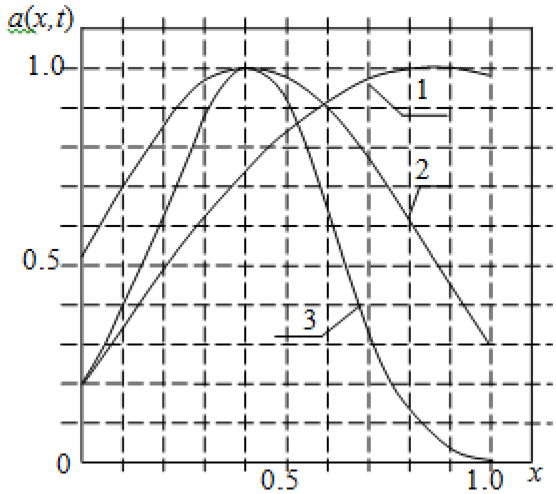

Рис. 2. Равномерное распределение размеров частиц

Здесь *1* — $t=10$; *2* — $t=30$; *3* — $t=60$.

Преимущество моделирования фильтрации на основе стохастических уравнений имеет то преимущество, что конечно-разностные методы являются более экономичными по сравнению со статистическими методами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Резников Г. Д., Жихарь А. С.* Численно-аналитический подход к моделированию переноса частиц в фильтрующем слое // Матем. моделирование, 1995. Т. 7, № 6. С. 118–125.

2. *Колесников А. В.* Математическое моделирование фильтрации жидкости в неоднородных и периодических пористых телах методом однородно-анизотропного эквивалентирования: автореферат дис. ... кандидата технических наук: 05.13.18 / Северо-Кавказский федеральный университет. Ставрополь, 2014.

УДК 517.984

СЛУЧАЙНО БЕЗУСЛОВНЫЕ БАЗИСЫ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

С. В. Асташкин (Самара, РФ)
astash@samsu.ru

Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ в банаховом пространстве X называется безусловно сходящимся, если для каждого выбора знаков $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, 2, \ldots$, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i x_i$ сходится в X. Более слабым является требование сходимости при *почти каждом* выборе знаков $(\varepsilon_i)_{i=1}^{\infty} \in \{1, -1\}^{\mathbb{N}}$ (относительно произведения считающих мер на двухточечном множестве $\{1, -1\}$). В этом случае говорят, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ *случайно безусловно сходится.*

Биортогональная система (x_i, x_i^*), где $x_i \in X$, $x_i^* \in X^*$, называется системой *случайной безусловной сходимости* (или RUC системой) в X, если для произвольного x из замкнутой линейной оболочки $[x_i]$ ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^*(x) x_i$ случайно безусловно сходится, или, то же самое, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^*(x) r_i(t) x_i$ сходится в X для почти всех $t \in [0, 1]$. Здесь r_i — функции Радемахера, т.е. $r_i(t) = \operatorname{sign}(\sin 2^i \pi t)$, $i \in \mathbb{N}$, $t \in [0, 1]$. Последнее условие эквивалентно тому, что существует константа $K > 0$, для которой

$$\int\limits_0^1 \Big\| \sum_{i=1}^{n} c_i r_i(t) x_i \Big\|_X \, dt \le K \Big\| \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \Big\|_X,$$

где $n = 1, 2, \ldots$ и вещественные числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$ произвольны [1, следствие 1.1].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ.