Класс (MS) включает в себя все полиэдральные конечномерные пространства, пространства $C(Q)$ (Q — компактное хаусдорфово пространство), $C_0(Q)$ (Q — локально компактное хаусдорфово пространство) и пространства типа $\ell^1(\Gamma)$.

Известен следующий результат [1].

Теорема A. *Пусть $\varnothing \neq M \subset X$ замкнуто. Рассмотрим следующие условия:*

1) *M — строгое протосолнце;*
2) *метрическая проекция P_M ORL-непрерывна;*
3) *M — LG-множество;*
4) *M — луна.*

Тогда каждое из первых трех условий влечет последующее. В (MS)-пространствах все четыре условия эквивалентны.

Хорошо известно, что в общем случае импликации 2)⇒3), 3)⇒4) теоремы A не являются обратимыми. Вопрос об обратимости импликации 1)⇒2) остается открытым начиная с 1972 г.

Мы показываем обратимость импликации 1)⇒2) теоремы A при дополнительном предположении монотонной линейно связности множества.

Теорема 1. *Монотонно линейно связное множество с ORL-непрерывной (в частности, с полунепрерывной снизу) метрической проекцией в конечномерном банаховом пространстве является B-стягиваемым строгим солнцем.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алимов А. Р., Царьков И. Г.* Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения // УМН. 2016. Т. 71, № 1.

2. *Brosowski B., Deutsch F.* Some new continuity concepts for metric projections // Bull. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 6. P. 974–978.

3. *Amir D., Deutsch F.* Suns, moons and quasi-polyhedra // J. Approx. Theory. 1972. Vol. 6. P. 176–201.

УДК 517.275, 517.517

КРИТЕРИЙ ПОЛНОЙ α-ДОСТИЖИМОСТИ ДЛЯ p-ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ[1]

К. Ф. Амозова (Петрозаводск, РФ)
amokira@rambler.ru

В некоторых разделах математики (например, в теоремах вложения, в теории интегральных представлений функции, в вопросах граничного

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00510).

поведения функций, разрешимости задачи Дирихле) важно, чтобы область определения функции $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяла *условию конуса*, т.е. чтобы существовали универсальные для Ω числа $\alpha \in (0;1)$ и $H \in (0;\infty]$ такие, что для каждой точки $p \in \Omega$ прямой круговой конус $V(l(p), H)$ с вершиной в точке p, раствора $\alpha\pi$, высотой H, осью симметрии $l(p)$ лежал в Ω [1].

В [2] были определены α-достижимые области, и было показано, что они являются областями с условием конуса, при этом $l(p) = -p$.

Определение 1. [2] *Область* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in \Omega$, *называется* α*–достижимой (относительно 0),* $\alpha \in [0;1)$, *если для каждой точки* $p \in \partial\Omega$ *существует такое число* $r = r(p) > 0$, *что конус*

$$K_+(p, \alpha, r) = \left\{ x \in \mathbb{B}^n[p, r] : \ \left(x - p, \frac{p}{\|p\|} \right) \geq \|x - p\| \cos \frac{\alpha\pi}{2} \right\} \subset \mathbb{R}^n \backslash \Omega.$$

Об α-достижимых областях смотри также [3].

Эти области в плоском случае ($n = 2$) впервые ввели J. Stankiewicz [4–5], D. A. Brannan и W. E. Kirwan [6].

Так, например, в [4–5] J. Stankiewicz рассматривал класс $S_{1-\alpha}$, состоящий из $(1-\alpha)$–звездообразных, $\alpha \in [0;1]$, аналитических в единичном круге $\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций вида $f(z) = a_1 z + {} + a_2 z^2 + \ldots$, $a_1 \neq 0$, удовлетворяющих условию

$$\left| \arg \frac{z f'(z)}{f(z)} \right| < \frac{(1-\alpha)\pi}{2} \quad \forall z \in \mathbb{B},$$

и показал, что область $\Omega \neq \mathbb{C}$ — α-достижима $\Longleftrightarrow$ $\Omega = f(\mathbb{B})$, где f — некоторая функция из класса $S_{1-\alpha}$.

В [2] P. Liczberski и В. Старков обобщили этот результат на класс биголоморфных в открытом единичном евклидовом шаре $\mathbb{B}^N$, $N \geq 1$, функций $f : \mathbb{B}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$, таких, что $f(0) = 0$ и

$$\mathrm{Re}\,\{z^*(Df(z))^{-1} f(z)\} \geq \|z^*(Df(z))^{-1}\| \cdot \|f(z)\| \cdot \sin \frac{\alpha\pi}{2} \quad \forall z \in \mathbb{B}^N,$$

и доказали, что все такие функции, отображающие $\mathbb{B}^N$ на α-достижимую область, обладают *свойством наследственности* (наследуют α-достижимость), т.е. если $r \in (0;1)$, то каждая область $f(r\mathbb{B}^N)$ — α-достижима, $\alpha \in (0;1)$.

Известно, что в классе гармонических функций $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(0) = 0$, сохраняющих ориентацию в $\mathbb{B}$, свойство выпуклости или звездообразности $f(\mathbb{B})$ не наследуется. В таких случаях, выделяют и рассматривают подкласс функций, которые обладают свойством наследственности (см. [7]).

Далее дадим определение p-гармонической функций.

Определение 2 (см., например [8]). Функция $f \in C^{2p}(\mathbb{B})$, $p \in \mathbb{N}$, называется *p-гармонической*, если $\Delta^p f = 0$ в $\mathbb{B}$, где Δ — оператор Лапласа.

Известно, что p-гармоническая сохраняющая ориентацию в $\mathbb{B}$ функция, может быть представлена в виде

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^{p} |z|^{2(k-1)} F_{p-k+1}(z), \tag{1}$$

где функции $F_{p-k+1} = h_{p-k+1} + \overline{g}_{p-k+1}$, $k = 1, \ldots, p$, являются гармоническими, h_{p-k+1} и g_{p-k+1} аналитическими в $\mathbb{B}$.

Заметим, что каждая гармоническая функция является p-гармонической. В этом классе p-гармонических функций рассмотрим подкласс функций, наследующих α-достижимость.

Определение 3. Будем говорить, что p-гармоническая функция Φ, $\Phi(0) = 0$, $J_\Phi(z) > 0$, является *вполне α-достижимой*, $\alpha \in [0, 1)$, если для каждого $r \in (0, 1)$ Φ отображает $\mathbb{B}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le r\}$ на α-достижимую область.

Теорема 1. *Пусть Φ является p–гармонической функцией в $\mathbb{B}$ вида (1), $\Phi(0) = 0$, и $J_\Phi(z) > 0$ в $\mathbb{B}$. Тогда Φ — вполне α-достижима, $\alpha \in [0, 1) \Longleftrightarrow$ для любого $z \in \mathbb{B}$ выполняется неравенство*

$$\sum_{k=1}^{p} |z|^{2(k-1)} \mathrm{Re}\,\{z(h'_{p-k+1}\overline{\Phi} - g'_{p-k+1}\Phi)\} \ge \sin\frac{\alpha\pi}{2} \cdot |\Phi| \cdot L^{1/2},$$

где

$$L = \mathrm{Re}^{\,2}\left\{ z \sum_{k=1}^{p} |z|^{2k-2} (h'_{p-k+1} - g'_{p-k+1}) \right\} +$$

$$+ \mathrm{Im}^{\,2}\left\{ z \sum_{k=1}^{p} |z|^{2k-2} (h'_{p-k+1} + g'_{p-k+1}) \right\}.$$

Как следствие, отсюда получаем критерий полной α-достижимости для бигармонических ($p = 2$), гармонических ($p = 1$), и аналитических ($p = 1$, $g = 0$) $\left(\text{условие } \left|\arg\left(\frac{z\,\Phi'(z)}{\Phi(z)}\right)\right| \le \frac{\pi}{2}(1-\alpha), \text{ см. [4–6]}\right)$ в $\mathbb{B}$ функций, а также критерий полной звездообразности (случай $\alpha = 0$) для p-гармонических, гармонических ($p = 1$) [2], и аналитических ($p = 1$, $g = 0$) $\left(\text{хорошо известное условие звездообразности } \mathrm{Re}\left\{\frac{z\,\Phi'(z)}{\Phi(z)}\right\} \ge 0\right)$ в $\mathbb{B}$ функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическая энциклопедия. Т. 2. М.: Сов. энцикл., 1979. 552 с.

2. *Liczberski P., Starkov V. V.* Domains in $\mathbb{R}^n$ with conical accessible boundary // J. Math. Anal. Appl. 2013. Vol. 408, № 2. P. 547–560. DOI: 10.1016/j.jmaa.2013.06.029.

3. *Амозова К. Ф.* Достаточные условия α-достижимости области в негладком случае // Probl. Anal. Issues Anal. 2013. Т. 2(20), №. 1. С. 3–11. DOI: 10.15393/j3.art.2013.2321.

4. *Stankiewicz J.* Quelques problèmes extrémaux dans les classes des fonctions α-angulairement étoilées // Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, Sectio A. 1966. Vol. XX. P. 59–75.

5. *Stankiewicz J.* Some remarks concerning starlike functions // Bulletin de l'académie Polonaise des sciences. Série des sciences math., astr. et phys. 1970. Vol. XVIII, №. 3, P. 143–146.

6. *Brannan D. A. and Kirwan W. E.* On some classes of bounded univalent functions // J. London Math. Soc. 1969. Vol. 2, №. 1. P. 431–443.

7. *Chuaqui M., Duren P., Osgood B.* Curvature Properties of Planar Harmonic Mappings // Computational Methods and Function Theory. 2004. Vol. 4, №. 1. P. 127–142. DOI: 10.1007/BF03321060.

8. *Li P., Ponnusamy S., Wang X.* Some properties of planar p-harmonic and log-p-harmonic mappings // Bull. Malays. Math. Soc. 2013. Vol. 36, №. 3, P. 595–609.

УДК 517.518.86

ОПЕРАТОР ОБОБЩЕННОГО СДВИГА, ПОРОЖДЕННЫЙ ВЕСОМ ЯКОБИ, И НЕРАВЕНСТВО НИКОЛЬСКОГО ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ НА ОТРЕЗКЕ[1]

В. В. Арестов, М. В. Дейкалова, (Екатеринбург, РФ)
vitalii.arestov@urfu.ru, marina.deikalova@urfu.ru

Будет обсуждаться точное неравенство Никольского между равномерной нормой и нормой пространства $L_q^{\alpha,\beta}$, $1 \le q < \infty$, с весом Якоби $(1-t)^\alpha(1+t)^\beta$ алгебраических многочленов на отрезке. Для обоснования результатов применен обобщенный сдвиг, порожденный весом Якоби. Изучено множество экстремальных функций, на которых достигается норма оператора сдвига.

Для ультрасферического веса такие исследования осуществлены в совместной работе авторов [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Arestov V. V., Deikalova M. V.* Nikolskii inequality between the uniform norm and L_q-norm with ultraspherical weight of algebraic polynomials on an interval // Comput. Methods Funct. Theory. 2015. Vol. 15(4). P. 689–708. DOI: 10.1007/s40315-015-0134-y

[1]Исследования выполнены при поддержке РФФИ (проект № 15-01-02705) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013)