существу, это ограничивает общую теорию экстремальных задач «прямыми методами», восходящими к принципу Гильберта – Лебега.

Данная работа посвящена приложениям K-субдифференциального исчисления к исследованию экстремальных вариационных задач с негладким (а именно субгладким) интегрантом (многомерный случай). Работа содержит вариационные приложения теории K-субдифференциалов первого порядка к экстремальным задачам с субгладким интегрантом. Получена оценка первого K-субдифференциала для вариационного функционала с субгладким интегрантом. Рассмотрены частные случаи, в том числе случай композиции субгладкой и гладкой функций. Получен компактный выпуклый аналог вариационного уравнения Эйлера – Остроградского. Разработанная методика позволяет найти в некоторых примерах гладкую субэкстремаль, которая не поддается определению классическими методами, ввиду субгладкости интегранта. На базе теории K-субдифференциалов высших порядков, получена оценка второго K-субдифференциала вариационного функционала. С помощью этой оценки получен соответствующий аналог необходимого условия Лежандра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Орлов И. В., Халилова З. И.* Компактные субдифференциалы в банаховых пространствах и их применение к вариационным функционалам // СМФН. 2013. Т. 49. С. 99–131.

2. *Орлов И. В.* Введение в сублинейный анализ // Современная математика. Фундаментальные направления. 2014. Т. 53. С. 64–132.

3. *Орлов И. В., Цыганкова А. В.* Исключение уравнения Якоби в многомерных вариационных задачах // Динамические системы. 2014. Т. 3(31), № 3–4. С. 233–248.

УДК 517.5

ОБОБЩЕННАЯ ФУНКЦИЯ МАРТЕНСА – ТЕРЕХИНА

С. А. Чумаченко (Саратов, РФ) [1]
chumachenkosergei@gmail.com

Введение. В работе Р. Мартенса [1] введена аффинная система, порожденная функцией

$$F(t) = \begin{cases} 8t, & t \in (0, 1/4), \\ 4 - 8t, & t \in (1/4, 3/4), \\ 8t - 8, & t \in (3/4, 1), \\ 0, & t \notin (0, 1). \end{cases}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00152).

Функция $F(t)$ есть линейная комбинация двух соседних функций Фабера – Шаудура. С другой стороны $F(t)$ с точностью до множителя совпадает с интегралом от функции Уолша $w_3(t) = r_0(t)r_1(t)$, а именно

$$F(t) = 8\int_0^t w_3(x)dx$$

Мы рассмотрим некоторое обобщение функции $F(t)$ которая получается многократным интегрированием функции Уолша $w_{2^n-1}(t)$ и получим рекуррентную формулу для ее вычсиления.

1. Определение функции F_n и ее свойства. Пусть $(r_k(t))_{k=0}^{infty}$ — функции Радемахера на отрезке $[0,1]$, $(W_n)_{n=0}^{\infty}$ — функции Уолша в нумерации Пэли. При $n \geq 2$ обозначим

$$\mathbf{1}_{(k,n)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}), \\ 0, & x \notin (\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}). \end{cases}$$

Зададим непрерывную функцию F_n через ее $(n-1)$-ю производную следующим образом:

$$F_n^{(n-1)} = \sum_{k=0}^{2^n-1} f_{(k,n)}, \quad F_n^{(l)}(0) = 0 \text{ при } l = 0,..,n-2,$$

где

$$f_{(k,n)}(x) = c_{(k,n)} * \mathbf{1}_{(k,n)}(x), \quad c_{(0,n)} = 1, \quad c_{(k,n)} = -c_{(k-2^{\lfloor log_2 k\rfloor},n)},$$

т. е. $c_{(k,n)}$ — это значения функции $F_n^{(n-1)}$ на интервале $\Delta_k^{(n)} = (\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$. Функция F_n однозначно восстанавливается интегрированием $n-1$ раз.

Обозначим через $w_n,\ n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\bigcup\{0\}$ функции Уолша в нумерации Пэли, а через $r_k,\ k \in \mathbb{N}_0$ — функции Радемахера на отрезке $[0,1]$.

Теорема 1. *Функция F_n имеет непрерывные производные до порядка $n-2$ включительно.*

Теорема 2. $F_n^{(n-1)} = w_{2^n-1}$.

Определение. Функцию f будем называть *антипериодической* на двоичном интервале $\Delta_j^{(n)}$ с периодом $\frac{1}{2^{n+1}}$, если для любых $x, y \in \Delta_j^{(n)}$, связанных соотношением $x + \frac{1}{2^{n+1}} = y$, справедливо равенство $f(x) = -f(y)$.

Очевидно, что функция Радемахера r_k периодична с периодом $\frac{1}{2^k}$ и антипериодична на любом интервале $\Delta_j^{(k)}$ с периодом $\frac{1}{2^{k+1}}$.

Лемма 1. *1. Функция Уолша $r_k r_{k+1} \ldots r_{n-1}$ периодична с периодом $\frac{1}{2^k}$.*

2. Функция Уолша $r_k r_{k+1} \ldots r_{n-1}$ антипериодична на любом интервале $\Delta_\nu^{(k)}$ с периодом $\frac{1}{2^{k+1}}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, 2^k - 1)$.

3. Функция Уолша $W_{2^n-1}(x) = r_0 r_1 \ldots r_{n-1}$ антипериодична на любом интервале $\Delta_\nu^{(k)}$ с периодом $\frac{1}{2^{k+1}}$ $(\nu = \overline{0, 2^k - 1}; k = \overline{0, n-1})$.

Лемма 2. *Пусть I — оператор интегрирования, т. е. $I(f)(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$. Тогда функция $I^l(W_{2^n-1})(x)$ антипериодична на любом интервале $\Delta_\nu^{(k)}$ $(k = n-1-l, \ldots, 0; l = 0, 1, \ldots, n-1)$ и*

$$\int\limits_{\Delta_j^{(n-1-l)}} I^l W_{2^n-1}\,dx = 0$$

.

Теорема 3. *Функция $W_{2^n-1} \cdot (I^l W_{2^n-1})$ периодична с периодом $T = \frac{1}{2^{n-l}}$ $(l = 1, 2, \ldots, n-1)$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мартенс Р. В.* О полной минимальной системе сжатий и сдвигов, связанной с системой Фабера–Шаудера // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. 2013. Т. 46. С. 299–300.

УДК 591.65

О ЗНАЧЕНИИ НЕОПРЕДЕЛЕННОЙ ВЕЛИЧИНЫ В АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ФОРМУЛЕ ДЛЯ КОНСТАНТЫ ЛЕБЕГА

И. А. Шакиров (Набережные Челны, РФ)

iskander@tatngpi.ru

Известно [1, 2], что тригонометрическому полиному Лагранжа

$$L_n(x,t) = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n+1} x(\widetilde{t_k}) D_n(\widetilde{t_k} - t) \quad (1)$$

$$\left(D_n(u) = \frac{\sin(n+0.5)u}{2\sin 0.5u}, \quad \widetilde{t_k} = \frac{2\pi}{2n+1}k \right),$$

интерполирующему периодическую функцию $x = x(t)$ $(t \in [0, 2\pi])$ в нечетном числе $N = 2n+1$ узлов, соответствует константа Лебега

$$\lambda_n = \frac{1}{2n+1} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{n} \operatorname{cosec} \frac{2k-1}{4n+2}\pi \right) =$$