Теорема 4. *Операторы R_α, рассматриваемые как операторы из $L_2[0,1]$ в $L_\infty[0,1]$, являются регуляризирующими для уравнения Абеля при любом β из интервала $(0,1)$.*

Рассмотрим величину

$$\Delta(\delta, R_\alpha, u) = \sup\{\|R_\alpha f_\delta - u\|_{L_\infty} : \|f_\delta - f\|_{L_2} \leq \delta\}$$

Теорема 5. *Если β — любое из интервала $(0,1)$, то для сходимости $\Delta(\delta, R_\alpha, u) \to 0$ при $\alpha \to 0, \delta \to 0$ необходимо согласование $\alpha = \alpha(\delta)$, удовлетворяющее условиям:*

1) $\alpha(\delta) \to 0$;

2) $\delta(\alpha(\delta))^{-(\frac{1}{2}+\beta)} \to 0$ при $\delta \to 0$,

и достаточно выполнения условия 1) и условия $\delta(\alpha(\delta))^{-\frac{3}{2}} \to 0$ при $\delta \to \to 0$.

Замечание. Семейство операторов $R_\alpha = S_\alpha A^{-1}$ также является регуляризирующим для уравнения Абеля, но лишь для диапазона $0 < < \beta < \frac{1}{2}$ [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хромов А. П., Хромова Г. В.* Об одной модификации оператора Стеклова // Современные проблемы теории функций и их приложния : тез. докл. Сарат. зим. шк. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. С. 181.

2. *Хромов А. П., Хромова Г. В.* Разрывные операторы Стеклова в задачах равномерного приближения производных на отрезке // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54, вып. 9. С. 1442–1447.

3.*Хромова Г.В.* Регуляризация уравнения Абеля с помощью разрывного оператора Стеклова // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4, ч. 2. С. 597–601.

УДК 517.9

C^1-РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙКОНАЛА [2]

И. Г. Царьков (Москва, РФ)
tsar@mech.math.msu.su

Одним из новых и перспективных направлений геометрической теории приближения является изучение ее методами решений уравнений Гамильтона – Якоби. Здесь для иллюстрации возможностей геометрической теории приближения мы изучим задачу точного описания множества C^1-решений уравнения эйконала $|\nabla u| = 1$ на некотором открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Из простейших соображений нетрудно получить, что такие решения локально представляют собой функции вида $c \pm \varrho(x, M)$ для некоторых констант $c \in \mathbb{R}$ и подмножеств $M \subset \mathbb{R}^n$.

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00022-а)

При этом существуют односвязная область Ω и C^1-решение уравнения эйконала, которое представляет собой счетную склейку функций вида $\varphi(x) = c_j \pm \varrho(x, M_j)$ ($j \in \mathbb{N}$), и при этом представить это решение в виде конечных склеек функций такого вида нельзя. Кстати для описания класса решений достаточно научиться это делать на областях (открытых и связных множествах). Поэтому далее будем считать, что Ω — область в $\mathbb{R}^n$. Изучаемая задача описания C^1-решений уравнения эйконала зависит от геометрии области, и, конечно, должна исследоваться для каждой области как отдельная задача.

Приведем общее утверждение, которое поясняет, в каком случае функция $\varphi(x) = c \pm \varrho(x, M)$ (можно считать, что M — замкнутое множество) является C^1-решением уравнения эйконала во всей области Ω. Основным здесь является понятие особых точек.

Определение 1. Точка $x \in \mathbb{R}^n \setminus M$ называется *регулярной* для замкнутого множества $M \subset \mathbb{R}^n$, если все точки некоторой окрестности $O(x)$ являются точками единственности (т. е. для них существует единственная ближайшая в M). Точки, не являющиеся регулярными или принадлежащие замыканию $\operatorname{int} M$, будем называть *особыми*.

Отметим, что множество всех регулярных точек (регулярное множество) является открытым, а множество всех особых точек (особое множество) точек является замкнутым. Регулярное множество состоит из так называемых точек солнечности (здесь и начинают свою работу методы геометрической теории приближения (см. обзоры [1, 2])). Из результатов геометрической теории приближения известно, что множество особых точек, не являющихся точками единственности, покрывается счетным набором липшицевых поверхностей и является связным и локально связным в случае выпуклых гиперповерхностей, а если множество, представляет собой гладкое многообразие класса C^2, то особое множество нигде не плотно.

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область, $M \subset \mathbb{R}^n$. Тогда функция $\varphi(x) = c \pm \varrho(x, M)$ является C^1-решением уравнения эйконала в области Ω только тогда, когда множество особых точек лежит в $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$.*

Это утверждение показывает, что изучение *особых множеств* различных подмножеств $\mathbb{R}^n$ представляет *особый* интерес. И часто позволяет отсеивать лишние функции вида $c \pm \varrho(x, M)$.

Теорема 2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область, $K = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ — компакт. Тогда класс функций $J = J_K = \{\varphi(x) = c \pm \varrho(x, M)|_\Omega \mid M \subset K$ – выпуклое непустое множество$\}$ состоит из C^1-решений уравнения эйконала в области Ω, более того, функция вида $c \pm \varrho(x, M)$ ($M \subset K$) является C^1-решением уравнения эйконала на Ω тогда и только тогда, когда ее сужение на Ω принадлежит классу J.*

Эта теорема отсеивает достаточно много подозрительных функций.

К примеру, если K имеет только одноточечные непустые выпуклые множества, то остаются только функции вида $c \pm |x - x_0|$ $(x_0 \in K)$.

Теорема 3. *Пусть гиперповерхность* $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ *класса* C^1 *разделяет область* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *на две компоненты связности* Ω_1 *и* Ω_2. *Тогда функция* $\psi_\Gamma(x) = c \pm \begin{cases} \varrho(x,\Gamma), & \text{если } x \in \Omega_1 \\ -\varrho(x,\Gamma), & \text{если } x \in \Omega_2 \end{cases}$ *является* C^1*-решением уравнения эйконала на* Ω *тогда и только тогда, когда множество особых точек* Γ *лежит в* $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$.

Отметим, что Γ из последней теоремы играет роль поверхности уровня некоторого C^1-решения уравнения эйконала на Ω. И вместе с теоремой 2 позволяет существенно отсеивать функции, подозреваемые в принадлежности к решениям, но не являющимися таковыми. Далее, в качестве иллюстрации данного факта, разберем пример для специальной области.

Пример. Пусть $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{N} K_j$, где K_j — попарно непересекающиеся следы простых спрямляемых кривых γ_j. Опишем все C^1-решения уравнения эйконала на Ω. Решения состоят из функций 3-х типов.

1-й тип — аффинные функции $c \pm (a, x)$, где $|a| = 1$. Этот класс представляет собой весь класс C^1-решений уравнения эйконала на всем $\mathbb{R}^n$ (кстати, легко вытекает из свойства чебышевских множеств быть выпуклыми в $\mathbb{R}^n$).

2-й тип — функции вида $c \pm \varrho(x, M)$, где M — непустые выпуклые подмножества $\bigcup\limits_{j=1}^{N} K_j$.

Перейдем к описанию (правда, пока неконструктивному) функций 3-го типа. Пусть γ — произвольная простая кривая, являющаяся частью какой-либо кривой γ_j $(j = \overline{1, N})$, а K — след кривой γ без концевых точек. В качестве Γ возьмем границу выпуклого тела D, представляющего собой объединение шаров $B(x, r_x)$ (с центром x радиуса r_x) по всем $x \in K$ и такого, что $\operatorname{card}(\Gamma \cap B(x, r_x)) \geqslant 2$ для всех $x \in K$. К третьему типу отнесем все функции вида $\psi_\Gamma(x)$ (см теорему 3).

Отметим, что в частном случае, когда дополнение Ω состоит лишь из конечного набора точек $\{x_j\}_{j=1}^N$, все C^1-решения уравнения эйконала на Ω — это аффинные функции $c \pm (a, x)$ $(|a| = 1)$ и функции вида $c \pm |x - x_j|$ $(j = \overline{1, N})$.

Понятно, что для изучения задачи описания решений уравнения эйконала важным является описание структуры особого множества, важно это также и для приложений. Здесь мы не будем уделять внимание этому вопросу, но отметим простейшие свойства особых множеств. Лишь одна C^1-гиперповерхность не имеет особых точек — это гиперплоскость.

C^1-гиперповерхность, имеющая единственную особую точку, — это сфера (см. [1]). Все остальные C^1-гиперповерхности имеют континуум особых точек.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Балаганский В. С., Власов Л. П.* Проблема выпуклости чебышевских множеств // УМН. 1996. Т. 51, № 6(312). С. 125–188.

2. *А.Р.Алимов А. Р., Царьков И. Г.* Связность и другие геометрические свойства солнц и чебышевских множеств // Фундаментальная и прикладная математика. 2014. Т. 63, № 4, P. 21–91.

УДК 517.97 +517.98

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ К-СУБДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ С СУБГЛАДКИМ ИНТЕГРАНТОМ (МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ)

А. В. Цыганкова (Симферополь, РФ)

tsygankova_a_v@mail.ru

Вариационные задачи с негладким интегрантом составляют важную часть современного вариационного исчисления.

Так, например, введение модуля под знак классического вариационного функционала уже приводит к экстремальной задаче, которая не поддается исследованию классическими методами, ввиду нарушения гладкости интегранта.

В подобных ситуациях обычно применяются методы негладкого анализа, использующие различные типы субдифференциалов, каждый из которых имеет свои преимущества и свою разумную область применимости.

Субдифференциалы, как инструмент негладкого анализа, достаточно давно получили признание в математике. Начиная с классического субдифференциала выпуклого функционала, появились и продолжают появляться новые определения субдифференциалов, рассчитанные на применение к различным классам экстремальных и других негладких задач (такие, как известный субдифференциал Ф. Кларка, субдифференциал Б. Н. Пшеничного и многие другие). В большинстве своем эти определения с отображениями в евклидовы пространства, но имеются и более общие.

При всем том, «больным местом» современного субдифференциального исчисления является отсутствие значимой теории субдифференциалов высших порядков. Это ведет, например, к отсутствию достаточных условий экстремума вне рамок выпуклости (в той или иной форме). По