если только $\|\varphi_h - \varphi\|_2$, $\|f_h - f\|_{L[Q_T]}$ *стремится к нулю при* $h \to 0$.

Таким образом, теорема 4 дает сходимость $u_h(x,t)$ при более слабых требованиях на $f(x,t)$, чем теорема 3.

УДК 517.51, 517.968

О РАЗРЫВНОМ ОПЕРАТОРЕ СТЕКЛОВА [1]

Г. В. Хромова (Саратов, РФ)
KhromovAP@info.sgu.ru

Рассматривется так называемый разрывный оператор Стеклова [1]:

$$S_\alpha u = \begin{cases} S_{\alpha_2} u, x \in [0, \frac{1}{2}] \\ S_{\alpha_1} u, x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \tag{1}$$

где

$$S_{\alpha_1} u = \frac{1}{\alpha} \int_{x-\alpha}^{x} u(t)dt,$$
$$S_{\alpha_2} u = \frac{1}{\alpha} \int_{x}^{x+\alpha} u(t)dt$$

В данном сообщении для нескольких математических задач приводятся методы их решения, построенные на базе этих операторов.

1. Получение равномерных приближений к непрерывным функциям и их непрерывным производным любого порядка на отрезке.

Теорема 1. *Для любой* $u(x) \in C^m[0,1]$ *имеет место сходимость:*

$$\|D^m S_\alpha^{m+1} u - u^{(m)}\|_{L_\infty} \to 0 \text{ при } \alpha \to 0,$$

где S_α^{m+1} *имеют вид (1) с заменой* S_{α_j} *на* $S_{\alpha_j}^{m+1}$, $j = 1, 2$, D^m *— оператор дифференцирования порядка* m. *При этом операторы* $D^m S_{\alpha_j}^{m+1}$ *имеют вид:*

$$D^m S_{\alpha_1}^{m+1} = \alpha^{-(m+1)} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k F_1(x - k\alpha)$$

$$D^m S_{\alpha_2}^{m+1} = \alpha^{-(m+1)} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k F_2(x + (m-k)\alpha),$$

где

$$F_1(x) = \int_{x-\alpha}^{x} u(\xi)\, d\xi, \quad F_2(x) = \int_{x}^{x+\alpha} u(\xi)\, d\xi,$$

[1]Работа выполнена в рамках проектной части госзадания Минобрнауки РФ (проект № 1.1520.2014K).

$$m \geq 0, \quad \alpha \leq \frac{1}{2(m+1)}, \quad \|\cdot\|_{L_\infty} = \max(\|\cdot\|_{C[0,\frac{1}{2}]},\ \|\cdot\|_{C[\frac{1}{2},1]}).$$

2. Решение задачи восстановления непрерывной функции и её непрерывных производных по приближениям $u_\delta(x) : \|u_\delta - - u\|_{L_2} \leq \delta$.

Рассматриваются величины

$$\Delta^m(\delta, D^m S_\alpha^{m+1}, u) = \sup\{\|D^m S_\alpha^{m+1} u_\delta - u^{(m)}\|_{L_\infty} : \|u_\delta - u\|_{L_2} \leq \delta\}$$

Теорема 2. *Для сходимости $\Delta(\delta, D^m S_\alpha^{m+1}, u) \to 0$ при $\alpha \to 0$, $\delta \to 0$ необходимо и достаточно выполнения согласования $\alpha = \alpha(\delta)$ такого что $\alpha(\delta) \to 0$ и $\delta(\alpha(\delta))^{-\frac{2m+1}{2}} \to 0$ при $\delta \to 0$.*

3. Получение равномерных приближений к решению уравнения Абеля по приближенно заданной правой части.

Рассмотривается уравнение Абеля:

$$Au \equiv \int_0^x \frac{(x-t)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} u(t)dt = f(x),$$

где $\Gamma(\beta)$ — гамма-функция, $0 < \beta < 1$, $u(x) \in C[0,1]$, $f(x)$ задана ее δ-приближением в $L_2[0,1] : \|f_\delta - f\|_{L_2} \leq \delta$.

Решается задача нахождения равномерных приближений к $u(x)$ по заданным $f_\delta(x)$ и δ. Строится семейство операторов $R_\alpha = S_\alpha^{(2)} A^{-1}$, где A^{-1} — оператор, обратный к A.

Теорема 3. *Операторы R_α являются интегральными операторами с ядрами $R_\alpha(x,t)$, имеющими вид:*

$$R_\alpha(x,t) = \alpha^{-2}(1-\beta)^{-1}(\Gamma(1-\beta))^{-1} \begin{cases} R_{\alpha_2}(x,t), x \in [0, \frac{1}{2}] \\ R_{\alpha_1}(x,t), x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

где

$$R_{\alpha_2}(x,t) = \begin{cases} (x-t)^{1-\beta} - 2(x-t+\alpha)^{1-\beta} + (x-t+2\alpha)^{1-\beta},\ 0 \leq t \leq x, \\ (x-t+2\alpha)^{1-\beta} - 2(x-t+\alpha)^{1-\beta},\ x \leq t \leq x+\alpha, \\ (x-t+2\alpha)^{1-\beta},\ x+\alpha \leq t \leq x+2\alpha, \\ 0,\ x+2\alpha \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$R_{\alpha_1}(x,t) = \begin{cases} (x-t-2\alpha)^{1-\beta} - 2(x-t-\alpha)^{1-\beta} + (x-t)^{1-\beta},\ 0 \leq t \leq x-2\alpha, \\ (x-t)^{1-\beta} - 2(x-t-\alpha)^{1-\beta},\ x-2\alpha \leq t \leq x-\alpha, \\ (x-t)^{1-\beta},\ x-\alpha \leq t \leq x, \\ 0,\ x \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Теорема 4. *Операторы R_α, рассматриваемые как операторы из $L_2[0,1]$ в $L_\infty[0,1]$, являются регуляризирующими для уравнения Абеля при любом β из интервала $(0,1)$.*

Рассмотрим величину

$$\Delta(\delta, R_\alpha, u) = \sup\{\|R_\alpha f_\delta - u\|_{L_\infty} : \|f_\delta - f\|_{L_2} \le \delta\}$$

Теорема 5. *Если β — любое из интервала $(0,1)$, то для сходимости $\Delta(\delta, R_\alpha, u) \to 0$ при $\alpha \to 0, \delta \to 0$ необходимо согласование $\alpha = \alpha(\delta)$, удовлетворяющее условиям:*

1) $\alpha(\delta) \to 0$;

2) $\delta(\alpha(\delta))^{-(\frac{1}{2}+\beta)} \to 0$ при $\delta \to 0$,

и достаточно выполнения условия 1) и условия $\delta(\alpha(\delta))^{-\frac{3}{2}} \to 0$ при $\delta \to \to 0$.

Замечание. Семейство операторов $R_\alpha = S_\alpha A^{-1}$ также является регуляризирующим для уравнения Абеля, но лишь для диапазона $0 < < \beta < \frac{1}{2}$ [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хромов А. П., Хромова Г. В.* Об одной модификации оператора Стеклова // Современные проблемы теории функций и их приложния : тез. докл. Сарат. зим. шк. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. С. 181.

2. *Хромов А. П., Хромова Г. В.* Разрывные операторы Стеклова в задачах равномерного приближения производных на отрезке // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54, вып. 9. С. 1442–1447.

3.*Хромова Г.В.* Регуляризация уравнения Абеля с помощью разрывного оператора Стеклова // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4, ч. 2. С. 597–601.

УДК 517.9

C^1-РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙКОНАЛА [2]

И. Г. Царьков (Москва, РФ)

tsar@mech.math.msu.su

Одним из новых и перспективных направлений геометрической теории приближения является изучение ее методами решений уравнений Гамильтона – Якоби. Здесь для иллюстрации возможностей геометрической теории приближения мы изучим задачу точного описания множества C^1-решений уравнения эйконала $|\nabla u| = 1$ на некотором открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Из простейших соображений нетрудно получить, что такие решения локально представляют собой функции вида $c \pm \varrho(x, M)$ для некоторых констант $c \in \mathbb{R}$ и подмножеств $M \subset \mathbb{R}^n$.

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00022-а)