УДК 517.984

ОБ ОБОБЩЕННОМ ФОРМАЛЬНОМ РЕШЕНИИ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ[1]

А. П. Хромов (Саратов, РФ)

KhromovAP@info.sgu.ru

Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t) + f(x,t),\ x \in [0,1],\ t \in (-\infty, \infty), \quad (1)$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad (2)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0. \quad (3)$$

Здесь $\varphi(x)$, $q(x)$, $f(x,t)$ — комплекснозначные функции, причем $q(x) \in \in L[0,1]$, $f(x,t) \in L[Q_T]$, где $Q_T = [0,1] \times [0,1]$ и $T > 0$ любое фиксированное. Условие $u'_t(x,0) = 0$ берется для простоты.

Формальное решение задачи (1)–(3) берем в следующем виде:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n \ge n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\Bigg[(R_\lambda \varphi)\cos\rho t +$$

$$+ \int\limits_0^t (R_\lambda f)\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\Bigg]\,d\lambda, \quad (4)$$

где $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора $Ly = -y''(x) + q(x)y(x)$, $y(0) = y(1)$ (λ — спектральный параметр, E — единичный оператор), $R_\lambda f$ означает, что R_λ применяется к $f(x,\tau)$ по переменной x; $\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Re}\rho \ge 0$; γ_n есть образ окружности $\tilde\gamma_n = \{\rho \mid |\rho - n\pi| = \delta\}$ ($\delta > 0$ и достаточно мало), r и n_0 выбраны так, чтобы все собственные значения $\lambda_n = \rho_n^2$ оператора L при $n \ge n_0$ таковы, что $|\lambda_n| \ge r$ и ρ_n попадают по одному в $\tilde\gamma_n$ при $n \ge n_0$.

Введем еще обобщенное формальное решение по формуле:

$$\tilde u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t), \quad (5)$$

где

$$u_0(x,t) = \frac{\tilde\varphi(x+t) + \tilde\varphi(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \Phi(\eta,\tau)\,d\eta,$$

[1]Работа выполнена в рамках проектной части госзадания Минобрнауки РФ (проект № 1.1520.2014K).

$\tilde{\varphi}(x)$, $\Phi(x,t)$ есть нечетные, 2-периодические продолжения по x функций $\varphi(x)$, $f(x,t)$ на всю ось,

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\int\limits_0^t ((R_\lambda - R_\lambda^0)f)\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\,d\lambda,$$

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)((R_\lambda - R_\lambda^0)\varphi)\cos\rho t\,d\lambda,$$

$R_\lambda^0 = (L_0 - \lambda E)^{-1}$ и L_0 есть L при $q(x)\equiv 0$.

Лемма. *Если $f(x,t)\in L[Q_T]$, $\varphi(x)\in L_p[0,1]$ при $p>1$, то ряды в $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ сходятся абсолютно и равномерно в Q_T при любом $T>0$.*

Теорема 1. *Если $\varphi(x)\in L_2[0,1]$, $f(x,t)\in L_2[Q_T]$, то ряд в (4) при $f(x,t)\equiv 0$ сходится почти всюду, ряд в (4) при $\varphi(x)\equiv 0$ сходится абсолютно и равномерно по x, t из Q_T, причем верно $u(x,t)=\tilde{u}(x,t)$ и имеют место оценки:*

$$\|u(x,t)\|_{L_2[Q_T]} \leq c_T\left\{\|\varphi\|_2 + \|f\|_{L_2[Q_T]}\right\},$$
$$\|u_0(x,t)\|_{L_2[Q_T]} \leq c_T\left\{\|\varphi\|_2 + \|f\|_{L[Q_T]}\right\},$$
$$\|u_1(x,t)\|_{C[Q_T]} \leq c_T\|f\|_{L[Q_T]}, \quad \|u_2(x,t)\|_{C[Q_T]} \leq c_T\|\varphi\|_2,$$

где c_T — постоянная, зависящая от T, $\|\cdot\|_2$ — норма в $L_2[0,1]$.

Теорема 2. *Если $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны, $\varphi(0)=\varphi(1)= = 0$, $L\varphi\in L_2[0,1]$; $f(x,t)$, $f'_t(x,t)$ непрерывны и $f(0,t)=f(1,t)=0$, то ряд в (4) сходится абсолютно и равномерно в Q_T и его сумма есть классическое решение задачи (1)–(3) (уравнение (1) выполняется почти всюду).*

Теорема 3. *Если: а) $\varphi_h(x)$, $f_h(x,t)$ из теоремы 2; б) $\varphi(x)\in L_2[0,1]$, $f(x,t)\in L_2[Q_T]$; $u_h(x,t)$, $u(x,t)$ — суммы ряда (4) для случаев а) и б) соответственно, то имеет место*

$$\lim_{h\to 0}\|u_h(x,t)-u(x,t)\|_{L_2[Q_T]} = 0,$$

если только $\|\varphi_h-\varphi\|_2$, $\|f_h-f\|_{L_2[Q_T]}$ стремится к нулю при $h\to 0$.

Теорема 4. *Если $\varphi_h(x)$, $f_h(x,t)$, $u_h(x,t)$ из теоремы 3, а $\varphi(x)\in \in L_2[0,1]$, $f(x,t)\in L[Q_T]$ и $\tilde{u}(x,t)$ есть (5) для таких $\varphi(x)$ и $f(x,t)$, то*

$$\lim_{h\to 0}\|u_h(x,t)-\tilde{u}(x,t)\|_{L_2[Q_T]} = 0,$$

если только $\|\varphi_h - \varphi\|_2$, $\|f_h - f\|_{L[Q_T]}$ *стремится к нулю при* $h \to 0$.

Таким образом, теорема 4 дает сходимость $u_h(x,t)$ при более слабых требованиях на $f(x,t)$, чем теорема 3.

УДК 517.51, 517.968

О РАЗРЫВНОМ ОПЕРАТОРЕ СТЕКЛОВА [1]

Г. В. Хромова (Саратов, РФ)
KhromovAP@info.sgu.ru

Рассматривется так называемый разрывный оператор Стеклова [1]:

$$S_\alpha u = \begin{cases} S_{\alpha_2}u, x \in [0, \frac{1}{2}] \\ S_{\alpha_1}u, x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \tag{1}$$

где

$$S_{\alpha_1}u = \frac{1}{\alpha}\int_{x-\alpha}^{x} u(t)dt,$$
$$S_{\alpha_2}u = \frac{1}{\alpha}\int_{x}^{x+\alpha} u(t)dt$$

В данном сообщении для нескольких математических задач приводятся методы их решения, построенные на базе этих операторов.

1. Получение равномерных приближений к непрерывным функциям и их непрерывным производным любого порядка на отрезке.

Теорема 1. *Для любой* $u(x) \in C^m[0,1]$ *имеет место сходимость:*

$$\|D^m S_\alpha^{m+1}u - u^{(m)}\|_{L_\infty} \to 0 \text{ при } \alpha \to 0,$$

где S_α^{m+1} *имеют вид (1) с заменой* S_{α_j} *на* $S_{\alpha_j}^{m+1}$, $j = 1, 2$, D^m *— оператор дифференцирования порядка* m. *При этом операторы* $D^m S_{\alpha_j}^{m+1}$ *имеют вид:*

$$D^m S_{\alpha_1}^{m+1} = \alpha^{-(m+1)} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k F_1(x - k\alpha)$$

$$D^m S_{\alpha_2}^{m+1} = \alpha^{-(m+1)} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k F_2(x + (m-k)\alpha),$$

где

$$F_1(x) = \int\limits_{x-\alpha}^{x} u(\xi)\,d\xi, \quad F_2(x) = \int\limits_{x}^{x+\alpha} u(\xi)\,d\xi,$$

[1]Работа выполнена в рамках проектной части госзадания Минобрнауки РФ (проект № 1.1520.2014К).