$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\ge n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)[R_\lambda\varphi - R_\lambda^0\varphi]\cos\rho t\, d\lambda.$$

Теорема 2. *Если $q(x) \in L[0,1]$, $\varphi(x) \in L_p[0,1]$ $(p>1)$, то ряд (4) сходится почти всюду по x и t и для его суммы $u(x,t)$ верно $u(x,0) = \varphi(x)$ почти всюду по $x \in [0,1]$. Более того, если $\varphi_h(x)$ имеет тот же смысл, что и $\varphi(x)$ в теореме 1, и $\|\varphi_h - \varphi\|_p \to 0$ при $h \to 0$, то решение $u_h(x,t)$ задачи (1)–(3) для такой $\varphi_h(x)$ сходится к $u(x,t)$ в $L_p[Q_T]$ при любом $T>0$.*

Таким образом, $u(x,t)$ есть обобщенное решение задачи (1)–(3) при любой $\varphi(x) \in L_p[0,1]$. Ряд $u_1(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно в Q_T, а при исследовании $u_0(x,t)$ существенно используется теорема Карлесона – Ханта о сходимости почти всюду тригонометрического ряда Фурье функций из $L_p[0,1]$ при $1 < p \le 2$.

Условия $q(x) \in L[0,1]$ и $\varphi(x) \in L_p[0,1]$ $(p>1)$ являются предельными для сходимости почти всюду ряда (4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Резольвентный подход в методе Фурье // ДАН. 2014. Т. 458, № 2. С. 138–140.

2. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Резольвентный подход для волнового уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 2. С. 51–63.

3. *Хромов А. П.* Смешанная задача для волнового уравнения с произвольными двухточечными краевыми условиями // ДАН. 2015. Т. 462, № 2. С. 148–150.

УДК 517.984

О СХОДИМОСТИ ФОРМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ПО МЕТОДУ ФУРЬЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРОСТЕЙШЕГО НЕОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ[1]

А. П. Хромов (Саратов, РФ)
KhromovAP@info.sgu.ru

Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \quad x \in [0,1], \quad t \in (-\infty,\infty), \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{2}$$

[1]Работа выполнена в рамках проектной части госзадания Минобрнауки РФ (проект № 1.1520.2014К).

$$u(x,0) = u'_t(x,0) = 0. \tag{3}$$

Формальное решение задачи (1)–(3) по методу Фурье есть:

$$u(x,t) = 2\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \int\limits_0^t (f(\xi,\tau), \sin n\pi\xi) \sin n\pi x \, sin\, n\pi(t-\tau)\, d\tau, \tag{4}$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2[0,1]$.

Теорема 1. *Если комлекснозначная $f(x,t) \in L_2[Q_T]$, где $Q_T = [0,1] \times [-T,T]$ и T любое, то ряд (4) сходится абсолютно и равномерно по $x, t \in Q_T$ и для его суммы $u(x,t)$ имеет место формула:*

$$u(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \varPhi(\eta,\tau)\, d\eta, \tag{5}$$

где $\varPhi(\eta,\tau)$ нечетна и 2-периодична по η на всей оси и $\varPhi(\eta,\tau) = \frac{1}{2} f(\eta,\tau)$, если $\eta \in [0,1]$.

Из этой теоремы легко следует

Теорема 2. *Если $f(x,t)$ непрерывно дифференцируема по $x \in [0,1]$ и непрерывна всюду по t, причем*

$$f(0,t) = f(1,t) = 0,$$

то $u(x,t)$ из (5) есть классическое решение задачи (1)–(3).

Этот результат другим способом получен В. А. Чернятиным [1, с. 51].

Теорема 3. *Если $f(x,t) \in L_2[Q_T]$, при любом $T > 0$, а $f_h(x,t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, и*

$$\lim_{h\to 0} \|f_h(x,t) - f(x,t)\|_{L_2[Q_T]} = 0,$$

то

$$\lim_{h\to 0} \max_{x,t\in Q_T} |u_h(x,t) - u(x,t)| = 0,$$

где $u_h(x,t)$ есть классическое решение задачи (1)–(3), когда $f(x,t)$ заменяется на $f_h(x,t)$, а $u(x,t)$ определяется по формуле (5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чернятин В. А.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1991. 112 с.