— «Использование свойств альтернативных комплексных чисел при решении задач механики, оптики и кристаллографии».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Привалов И. И.* Введение в теорию комплексного переменного. М. : Наука, 1977. 444 с.

2. *Александров В. Д.* Альтернативные комплексные числа и действия над ними. Донецк : Донбасс, 2012. 239 с.

УДК 517.984

МОНОТОННО ЛИНЕЙНО СВЯЗНОЕ МНОЖЕСТВО С РАДИАЛЬНО НЕПРЕРЫВНОЙ СНИЗУ МЕТРИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИЕЙ ЯВЛЯЕТСЯ СТРОГИМ СОЛНЦЕМ[1]

А. Р. Алимов (Москва, РФ)

alexey.alimov-msu@yandex.ru

Всюду ниже X — действительное линейное нормированное пространство, $B(x,r)$ — замкнутый шар с центром x и радиуса r, $\mathring{B}(x,r)$ — открытый шар.

Ниже мы следуем определениям, данным в обзоре [1].

Пусть $k(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, — непрерывная кривая в линейном нормированном пространстве X. Кривая $k(\cdot)$ *монотонная*, если $f(k(\tau))$ является монотонной функцией по τ для любого $f \in \operatorname{ext} S^*$ (где $\operatorname{ext} S^*$ — множество крайних точек единичной сферы S^* сопряженного пространства).

Замкнутое подмножество $M \subset X$ называется *монотонно линейно связным*, если любые две точки из M можно соединить непрерывной монотонной кривой (дугой) $k(\cdot) \subset M$. Монотонно линейно связное множество всегда экстремально монотонно линейно связно (т.е. его пересечение с любым пересечением гиперполос, порождаемых экстремальными функционалами единичной сферы сопряженного пространства) монотонно линейно связно. Частным случаем бруса является замкнутый шар.

Пусть $\varnothing \neq M \subset X$, $x_0 \in X$, P_M — оператор метрической проекции на M. Метрическая проекция P_M *внешне радиально непрерывна снизу* (*ORL-непрерывна*) в точке x_0 если для любого $v_0 \in P_M x_0$ и любого открытого open множества W такого, что $PMx_0 \cap W \neq \varnothing$, существует окрестность U точки x_0 такая, что $P_M x_0 \cap W \neq \varnothing$ для каждого $x \in U \cap \{v_0 + \lambda(x_0 - v_0) \mid \lambda \geqslant 1\}$ (см. [2]). Метрическая проекция P_M ORL-непрерывна, если оператор P_M ORL-непрерывен в каждой точке

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00295).

пространства X. Понятно, что полунепрерывная снизу метрическая проекция является ORL-непрерывной. Однако обратная импликация может нарушаться.

Замкнутое множество M называется *LG-множеством* (или *глобальным минимизатором*), если для любого $x \notin M$ каждый локальный минимум функции $\Phi_x(y) = \|y - x\|$, $y \in M$, является глобальным; иными словами, из того, что $y \in P_{M \cap B(y,\varepsilon)}x$ следует, что $y \in P_M x$.

Для подмножества $\varnothing \neq M \subset X$ точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой солнечности*, если существует точка $y \in P_M x \neq \varnothing$ (называемая *точкой светимости*) такая, что

$$y \in P_M\big((1-\lambda)y + \lambda x\big) \quad \text{для всех} \quad \lambda \geqslant 0 \tag{1}$$

(на геометрическом языке это означает, что из точки y исходит «солнечный» луч, проходящий через x, для каждой точки которого y является ближайшей из M).

Точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой строгой солнечности*, если $P_M x \neq \varnothing$ и условие (1) выполнено для любой точки $y \in P_M x$. Если же для $x \in X \setminus M$ условие (1) выполнено для любой точки $y \in P_M x$, то точка x называется *точкой строгой протосолнечности* (при этом, в отличие от точки строгой солнечности, ближайшая точка y к x не обязана существовать).

Множество $M \subset X$ называется *солнцем* (соответственно, *строгим солнцем*), если каждая точка $x \in X \setminus M$ является точкой солнечности (соответственно, строгой солнечности) для M. Замкнутое множество $M \subset X$ называется *строгим протосолнцем*, если каждая точка $x \in X \setminus M$ является точкой строгой протосолнечности. Выпуклое множество всегда является строгим протосолнцем (выпуклое множество существования — строгим солнцем).

Солнце (в отличие от строгого солнца; см. теорему А) не обязано быть LG-множеством даже в двумерном случае.

Множество $\mathring{K}(y,x) = \bigcup_{r>0} \mathring{B}\big(-ry+(r+1)x, (r+1)\|x-y\|\big)$, состоящее из гомотетичных раздутий шара $\mathring{B}(x, \|x-y\|)$ относительно точки y, называется *опорным конусом* $\mathring{K}(y,x)$ к шару $B(x, \|x-y\|)$ в его граничной точке y.

Точка $y_0 \in M$ называется *лунной точкой* [2], если из того, что $x \in P_M^{-1} y_0$ и $\mathring{K}(v_0, x) \cap M \neq \varnothing$ следует, что $y_0 \in \mathring{K}(y_0, x) \cap M$. Замкнутое множество называется *луной* [2, 3], если все его точки лунные. LG-множество всегда является луной.

Пространство X называется *(MS)-пространством* [2, 3], если в X любая луна является строгим протосолнцем (множеством Колмогорова).

Класс (MS) включает в себя все полиэдральные конечномерные пространства, пространства $C(Q)$ (Q — компактное хаусдорфово пространство), $C_0(Q)$ (Q — локально компактное хаусдорфово пространство) и пространства типа $\ell^1(\Gamma)$.

Известен следующий результат [1].

Теорема A. *Пусть $\varnothing \neq M \subset X$ замкнуто. Рассмотрим следующие условия:*

1) *M — строгое протосолнце;*
2) *метрическая проекция P_M ORL-непрерывна;*
3) *M — LG-множество;*
4) *M — луна.*

Тогда каждое из первых трех условий влечет последующее. В (MS)-пространствах все четыре условия эквивалентны.

Хорошо известно, что в общем случае импликации 2)⇒3), 3)⇒4) теоремы A не являются обратимыми. Вопрос об обратимости импликации 1)⇒2) остается открытым начиная с 1972 г.

Мы показываем обратимость импликации 1)⇒2) теоремы A при дополнительном предположении монотонной линейно связности множества.

Теорема 1. *Монотонно линейно связное множество с ORL-непрерывной (в частности, с полунепрерывной снизу) метрической проекцией в конечномерном банаховом пространстве является B-стягиваемым строгим солнцем.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алимов А. Р., Царьков И. Г.* Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения // УМН. 2016. Т. 71, № 1.

2. *Brosowski B., Deutsch F.* Some new continuity concepts for metric projections // Bull. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 6. P. 974–978.

3. *Amir D., Deutsch F.* Suns, moons and quasi-polyhedra // J. Approx. Theory. 1972. Vol. 6. P. 176–201.

УДК 517.275, 517.517

КРИТЕРИЙ ПОЛНОЙ α-ДОСТИЖИМОСТИ ДЛЯ p-ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ[1]

К. Ф. Амозова (Петрозаводск, РФ)
amokira@rambler.ru

В некоторых разделах математики (например, в теоремах вложения, в теории интегральных представлений функции, в вопросах граничного

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00510).