СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Денисов А. М.* Ввведение в теорию обратных задач. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1994. 206 с.

2. *Хромов А. А., Хромова Г. В.* Решение задачи об определении плотности тепловых источников // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 3. С. 309–314.

УДК 517.984

О ФОРМАЛЬНОМ РЕШЕНИИ ПО МЕТОДУ ФУРЬЕ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ[1]

А. П. Хромов (Саратов, РФ)
KhromovAP@info.sgu.ru

Рассмотрим волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \quad x \in [0,1], \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{1}$$

при условиях:

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0. \tag{3}$$

Предполагаем, что комплексная $q(x) \in L[0,1]$. Условие $u'_t(x,0) = 0$ берется для простоты.

В $[1,2]$ был предложен резольвентный подход в методе Фурье, базирующийся на применении метода Коши – Пуанкаре контурного интегрирования резольвенты оператора, порождаемого соответсвующей спектральной задачей, для получения классического решения задачи (1)–(3) при минимальных требованиях гладкости $\varphi(x)$. Теперь у нас $\varphi(x)$ удовлетворяет более слабым требованиям. Кроме того, теперь потенциал $q(x) \in L[0,1]$. Приводимые ниже результаты усиливают соответвующие результаты для случая $q(x) \in C[0,1]$ в [3].

Как и в $[1,2]$ ряд формального решения задачи (1)–(3) берем в виде:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\ge n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\varphi)\cos\rho t\,d\lambda, \tag{4}$$

где $R_\lambda = (L-\lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L (E — единичный оператор, λ — спектральный параметр), $Ly = -y''(x) + q(x)y(x)$ при условиях

[1]Работа выполнена в рамках проектной части госзадания Минобрнауки РФ (проект № 1.1520.2014К).

$y(0) = y(1) = 0$; $r > 0$ фиксировано и таково, что все собственные значения оператора L при $|\lambda_n| > r$ простые и попадают по одному в области с границами γ_n, являющиеся образами окружностей $\tilde{\gamma}_n = \{\rho |\, |\rho - n\pi| = \delta\}$ ($\delta > 0$ и достаточно мало), $\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Re}\rho \geq 0$, $n \geq n_0$.

Представим (4), как и в [1, 2], в виде:

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t), \tag{5}$$

где

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\frac{1}{\lambda-\mu_0}(R^0_\lambda g)\cos\rho t\,d\lambda,$$

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\frac{1}{\lambda-\mu_0}[R_\lambda g - R^0_\lambda g]\cos\rho t\,d\lambda, \tag{6}$$

R^0_λ — резольвента оператора L_0, получающегося из L при $q(x) \equiv 0$, $g = (L - \mu_0 E)\varphi$, μ_0 не является собственным значением операторов L и L_0, $|\mu_0| > r$ и μ_0 находится вне γ_n при $n \geq n_0$. Формула (5) есть аналог процедуры ускорения сходимости рядов, принадлежащей А. Н. Крыловым.

1. Здесь считаем, что $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ и $L\varphi \in L_p[0,1]$ при $1 < p \leq 2$.

Лемма 1. *Имеет место формула:*

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}[\Phi(x+t) + \Phi(x-t)],$$

где $\Phi(x)$, $\Phi'(x)$ *абсолютно непрерывны,* $\Phi''(x) \in L_p[-A, A]$ *при любом* $A > 0$, $\Phi(x) = -\Phi(-x)$, $\Phi(2+x) = \Phi(x)$, $\Phi(x) = \varphi_1(x) = R^0_{\mu_0} g$ *при* $x \in [0,1]$.

Лемма 2. *При* $|\operatorname{Im}\rho| \leq h$ *(*$h > 0$ *любое) имеет место асимптотика:*

$$z_2(x,\rho) = \frac{\sin\rho x}{\rho} - \frac{1}{2\rho^2}\left(\int\limits_0^x q(\tau)\,d\tau\right)\cos\rho x +$$
$$+\frac{1}{4\rho^2}\int\limits_0^x\left[q\left(\frac{x-\tau}{2}\right) + q\left(\frac{x+\tau}{2}\right)\right]\cos\rho\tau\,d\tau + O\left(\frac{1}{\rho^3}\right).$$

Лемма 3. *Обозначим*

$$\varphi_2(x)=\int\limits_x^1 g(\xi)q\left(\frac{\xi-x}{2}\right)d\xi,\quad \varphi_3(x)=\int\limits_x^1 g(\xi)q\left(\frac{\xi+x}{2}\right)d\xi.$$

Тогда

$$\|\varphi_j\|_p\le 2\|g\|_p\|q\|_1\quad (j=2,3),$$

где $\|\cdot\|_p$ *— норма в* $L_p[0,1]$.

Лемма 4. *Ряд* $u_1(x,t)$ *и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием по* x *и дважды по* t *сходятся абсолютно и равномерно в* $Q_T=\{x,t|\ x\in[0,1],\ t\in[-T,T]\}$ *(*$T>0$ *любое).*

Лемма 5. *Функция* $u'_{1x}(x,t)$ *абсолютно непрерывна по* x *и почти всюду по* x *и* t

$$u''_{1x^2}(x,t)=q(x)u(x,t)+d(x,t),$$

где

$$d(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r}+\sum_{n\ge n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\frac{\lambda}{\lambda-\mu_0}\times$$

$$\times[v(x,\rho)(g,z_2)-v^0(x,\rho)(g,z_2^0)]\cos\rho t\,d\lambda,$$

и ряд для $d(x,t)$ *сходится абсолютно и равномерно на* Q_T*. Здесь* $v(x,\rho)=\dfrac{z_2(x,\rho)z_1(1,\rho)}{z_2(1,\rho)}$*, где* $z_1(x,\rho)$ *и* $z_2(x,\rho)$ *— решения уравнения* $y''-q(x)y+\rho^2y=0$ *при условиях* $z_1(0,\rho)=1$*,* $z_1'(0,\rho)=0$*,* $z_2(0,\rho)=0$*,* $z_2'(0,\rho)=1$ *и* $v^0(x,\rho)$ *то же, что и* $v(x,\rho)$ *при* $q(x)\equiv 0$*,* $(\cdot,\cdot)$ *— скалярное произведение в* $L_2[0,1]$.

Теорема 1. *Если* $q(x)\in L[0,1]$*,* $\varphi(x)$*,* $\varphi'(x)$ *абсолютно непрерывны,* $\varphi(0)=\varphi(1)=0$*,* $L\varphi\in L_p[0,1]$ *(*$1<p\le 2$*), то сумма* $u(x,t)$ *ряда* (4) *обладает свойствами:* $u(x,t)$ *непрерывна и непрерывно дифференцируема по* x *и* t*;* $u'_x(x,t)$ $(u'_t(x,t))$ *абсолютно непрерывна по* x *(по* t*); удовлетворяет* (1) *почти всюду и* (2), (3)*, т. е. является решением задачи* (1)–(3)*, когда* (1) *выполняется лишь почти всюду.*

2. Пусть теперь $\varphi(x)\in L_p[0,1]$ $(p>1)$. В этом случае будем брать в (5) следующие $u_0(x,t)$ и $u_1(x,t)$:

$$u_0(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r}+\sum_{n\ge n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda^0\varphi)\cos\rho t\,d\lambda,$$

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)[R_\lambda\varphi - R_\lambda^0\varphi]\cos\rho t\, d\lambda.$$

Теорема 2. *Если $q(x) \in L[0,1]$, $\varphi(x) \in L_p[0,1]$ $(p > 1)$, то ряд (4) сходится почти всюду по x и t и для его суммы $u(x,t)$ верно $u(x,0) = \varphi(x)$ почти всюду по $x \in [0,1]$. Более того, если $\varphi_h(x)$ имеет тот же смысл, что и $\varphi(x)$ в теореме 1, и $\|\varphi_h - \varphi\|_p \to 0$ при $h \to 0$, то решение $u_h(x,t)$ задачи (1)–(3) для такой $\varphi_h(x)$ сходится к $u(x,t)$ в $L_p[Q_T]$ при любом $T > 0$.*

Таким образом, $u(x,t)$ есть обобщенное решение задачи (1)–(3) при любой $\varphi(x) \in L_p[0,1]$. Ряд $u_1(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно в Q_T, а при исследовании $u_0(x,t)$ существенно используется теорема Карлесона – Ханта о сходимости почти всюду тригонометрического ряда Фурье функций из $L_p[0,1]$ при $1 < p \leq 2$.

Условия $q(x) \in L[0,1]$ и $\varphi(x) \in L_p[0,1]$ $(p > 1)$ являются предельными для сходимости почти всюду ряда (4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Резольвентный подход в методе Фурье // ДАН. 2014. Т. 458, № 2. С. 138–140.

2. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Резольвентный подход для волнового уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 2. С. 51–63.

3. *Хромов А. П.* Смешанная задача для волнового уравнения с произвольными двухточечными краевыми условиями // ДАН. 2015. Т. 462, № 2. С. 148–150.

УДК 517.984

О СХОДИМОСТИ ФОРМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ПО МЕТОДУ ФУРЬЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРОСТЕЙШЕГО НЕОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ[1]

А. П. Хромов (Саратов, РФ)

KhromovAP@info.sgu.ru

Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \quad x \in [0,1], \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{2}$$

[1]Работа выполнена в рамках проектной части госзадания Минобрнауки РФ (проект № 1.1520.2014К).