Теорема 3. *Пусть* (X^i, μ^i), $i = 1, \ldots, D$ — *измеримые пространства конечной меры,* $X = \prod_{i=1}^{D} X^i$, $\mu = \bigotimes_{i=1}^{D} \mu^i$, $\{T^i_{n^i}\}_{n^i \in A^i}$, $i = 1, \ldots, D$, — *направленности линейных интегральных операторов, действующих в соответстующих* $L^1(X^i, \mu^i)$, *таких, что каждый максимальный оператор* T^i *имеет слабый тип (1,1) и, кроме того, для любого* $i = 1, \ldots, D$ *и любой ограниченной функции* $\phi \in L^1(X^i, \mu^i)$ *выполнено* $\lim\limits_{n^i \in A^i} T^i_{n^i}\phi(x) = \phi(x)$ μ^i*-почти всюду.*

Тогда для любой $f \in L^1(X)$ *такой, что* $f \cdot \ln(|f| + 1) \in L^1(X)$, *выполнено* $\lim\limits_{\boldsymbol{n} \in A} T_{\boldsymbol{n}} f(x) = f(x)$ μ*-почти всюду, где* A — *произвольная поднаправленность тензорного произведения направленностей* $\{T^i_{n^i}\}_{n^i \in A^i}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богачев В. И.* Основы теории меры : в 2 т. Т. 2. М.; Ижевск : НИЦ Регулярная и Хаотическая динамика, 2006. 680 с.

2. *Голубов Б. И.,Ефимов А. В.,Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. М. : Изд. ЛКИ, 2008. 352 с.

УДК 517.512

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С МАЛЫМИ ПРОПУСКАМИ

Ю. Х. Хасанов, Ф. М. Талбаков (Душанбе, Таджикистан)

yukhas60@mail.ru

Пусть $f(x)$ — интегрируемая на отрезке $[-\pi, \pi]$ периодическая функция и имеет ряда Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=\infty}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{1}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ntdt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ntdt.$$

Определение 1. Говорят, что *ряд Фурье функции* $f(x)$ *имеет пропуски*, если $a_n^2 + b_n^2 > 0$ только для $n = n_k$ $(k = 1, 2, ...)$, где $1 < n_1 < n_2 < \ldots$ — натуральные числа.

Пусть $f(x)$ — непрерывная функция с ограниченным изменением на отрезка $[-\eta, \eta]$, где $0 < \eta < \pi$, а последовательность $\{n_k\}$ $(k = 1, 2, ...)$ удовлетворяет условию малых пропусков, т.е.

$$n_{k+1} - n_k \geq \frac{4\pi}{\eta} \tag{2}$$

М. Нобль [1] показал, что если функция $f(x)$ имеет ограниченное изменение и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{\omega(1/n, f)} < \infty,$$

и кроме того, если при $k \to \infty$, выполняется

$$\frac{n_{k+1} - n_k}{\log n_k} \to \infty,$$

то ряд (1) сходится абсолютно. П. Кеннеди [2] доказал, что для абсолютной сходимости рядов вида (1) достаточно, чтобы выполнялись условия $n_{k+1} - n_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Обобщая результаты Нобля и Кеннеди для рядов Фурье с указанными малыми пропусками вида (2), Р. Боянич и М. Томич [3] доказали, что если этот ряд на отрезке $[-\eta, \eta] \subset [-\pi, \pi]$ $(0 < \eta < \pi)$ имеет модуль непрерывности

$$\omega(h, f) = \sup_{|x_1 - x_2| \leq h} |f(x_1) - f(x_2)| \ (x_1, x_2 \in [-\eta, \eta]),$$

то условия

$$\int_{-\eta}^{\eta} |df(t)| < \infty, \int_{1}^{\infty} \omega(1/t, f) \Big(\sum_{n_{k \leq t}} 1 \Big)^{1/2} \frac{dt}{t^{3/2}} < \infty,$$

влекут сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_{n_k}| + |b_{n_k}|).$$

Если выполнены условия

$$n_{k+1} - n_k \geq \frac{4\pi}{\eta} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

и

$$n_k \geq C k^{\rho} \quad (\rho \geq 1;\ k = 1, 2, \ldots),$$

то

$$\sum_{n_k \leq x} 1 \leq \sum_{C k^{\rho} \leq x} 1 \leq \Big(\frac{x}{C} \Big)^{1/\rho}.$$

Следовательно, второе условие теоремы Боянича и Томича примет следующий вид:

$$\int_{1}^{\infty} \omega(1/t, f) t^{\frac{1}{2\rho} - 1} dt < \infty.$$

В настоящей работе найдены достаточные условия абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций с малыми пропусками в равномерной метрике. Однако, в отличие от периодических функций, где условия накладываются только на гладкости функций, здесь потребуется дополнительные условия и на поведения показателей Фурье (см. напр., [4] или [5]).

Пусть $f(x)$ — равномерная почти-периодическая функция, т.е. $f(x) \in \mathbf{B}$ и ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n x}, \tag{3}$$

где

$$A_n = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x) e^{-i\lambda_n x} dx$$

— коэффициенты Фурье функций $f(x) \in \mathbf{B}$, а $\{\lambda_n\}$ $(n = 1, 2, ...)$ — показатели Фурье, которые имеют единственную предельную точку в бесконечности, т. е.

$$\lambda_0 = 0, \lambda_{-n} = -\lambda_n, \lambda_n < \lambda_{n+1}, \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty. \tag{4}$$

Теорема. *Пусть $f(x) \in \boldsymbol{B}$ имеет ряда Фурье* (3) *с показателями удовлетворяющих условий* (4). *Если этот ряд допускает малых пропусков вида $n_{k+1} - n_k \geq \frac{4\pi}{T}$ $(T \to \infty)$ и*

$$\int_1^{\infty} \omega_k(f;h)_B \sqrt{S(x)} \frac{dx}{x} < \infty,$$

где $\omega_k(f;h)_B$ — модуль гладкости функции $f(x) \in \boldsymbol{B}$, а $S(t) = \sum_{n_k \leq t} 1$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_{n_k}| < \infty.$$

Эта теорема содержит результатов Нобля и Кеннеди, потому что из неравенства

$$l = \inf_{k\geq 0} (n_{k+1} - n_k) \geq \frac{4\pi}{T}$$

вытекает, что $n_k \geq lk$ $(k = 1, 2, ...)$, и следовательно выполняется неравенства

$$\sum_{n_k \leq x} 1 \leq \sum_{lk \leq x} 1 \leq \frac{x}{l}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Noble M.* Coefficient properties of Fourier series with a gap condition // Math. Ann. 1958. Vol. 128. P. 55–62.

2. *Kennedy P.* Fourier series with gap // Quart. Journ. Math. 1956. Vol. 7. P. 224–230.

3. *Боянич Р., Томич М.* Об абсолютной сходимости рядов Фурье с малыми пропусками // Матем. сб. 1966. Т. 70(112), № 3. С. 297–309

4. *Хасанов Ю. Х.* Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций // Матем. заметки. 2013. Т. 94, № 5. С. 745–756.

5. *Хасанов Ю. Х.* Об абсолютной суммируемости рядов Фурье почти-периодических функций // Anal. Math. 2013. Vol. 39. P. 259–270.

УДК 517.5

О МНОЖЕСТВАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ СЧЕТНОКРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

Н. Н. Холщевникова (Москва, РФ)

Kholshchevnikova@gmail.com

Для счетнократных тригонометрических рядов исследуются множества единственности, в случае сходимости этих рядов по прямоугольникам.

Системой Йессена или счетнократной тригонометрической системой называется система функций счетного множества переменных

$$\prod_{r=1}^{p} e^{2\pi i n_r x_r} = \theta_{n_1,\dots,n_p}(x), \quad p \in \mathbb{N}, \quad n_r \in \mathbb{Z},$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$, $x_n \in \mathbb{R}$.

Функции системы можно считать определенными на бесконечномерном торе, рассматриваемом как декартово произведение счетного множества одномерных торов $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{T}^\infty = \{x = (x_1, ..., x_n, ...) : 0 \leq x_n < 1, n \in \mathbb{N}\}.$$

На торе $\mathbb{T}^\infty$ определяется мера Лебега, как на пространстве-произведении пространств $\mathbb{T}$ с одномерной мерой Лебега. Система Йессена является полной ортонормированной системой на $\mathbb{T}^\infty$. Впервые систематически изучается эта система в работе Йессена [1].

Обозначим через $\mathbb{Z}^{<\infty}$ множество бесконечномерных векторов $n = (n_1, ..., n_p, ...)$ с целочисленными координатами $n_p \in \mathbb{Z}$ ($p \in \mathbb{N}$), лишь конечное число которых отлично от нуля.