10. *Berdnikov G. S., Lukomskii S. F.* N-Valid trees in wavelet theory on Vilenkin groups // Intern. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. 2015. Vol. 13, № 5. 1550037 (23 pages).

11. *Фарков Ю. А.* Дискретные вейвлеты и преобразование Виленкина – Крестенсона // Матем. заметки. 2011. Т. 89, № 6. С. 914–928.

12. *Farkov Yu. A., Rodionov E. A.* On biorthogonal discrete wavelet bases // Intern. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. 2015. Vol. 13, № 1. 1550002 (18 pages).

13. *Farkov Yu. A.* Periodic wavelets in Walsh analysis // Communic. Math. Appl. 2012. Vol. 3, № 3. P. 223–242.

УДК 517.98

СХОДИМОСТЬ ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ НАПРАВЛЕННОСТЕЙ[1]

Д. В. Фуфаев (Москва, РФ)
fufaevdv@rambler.ru

Пусть (X, μ) — пространство с мерой, а оператор T действует из $L^0(X, \mu)$ в $L^0(X, \mu)$. Назовем T выпуклым, если из существования Tf_1 и Tf_2 следует существование $T(f_1 + f_2)$ и при этом $|T(f_1 + f_2)(x)| \leq |Tf_1(x)| + |Tf_2(x)|$. Будем говорить, что выпуклый оператор T имеет слабый тип $(1, 1)$ с константой C, если для любого $\lambda > 0$ и для любой функции $f \in L^1(X, \mu)$ выполняется следующее неравенство:

$$\mu\{x \in X : |Tf(x)| > \lambda\} \leq \frac{C}{\lambda}||f||_{L^1(X,\mu)}.$$

Теорема 1 (неравенство Харди – Литтльвуда).
Пусть $\mu(X) < \infty$, $f \in L^1(X), f \cdot \ln(f + 1) \in L^1(X), f \geq 0$, T *— оператор слабого типа* $(1, 1)$ *и задано* $\varepsilon > 0$*. Тогда для любого* $\gamma > 0$ *найдется множество* $X_\gamma \subset X$ *такое, что* $\mu(X_\gamma) > \mu(X) - \gamma$ *и справедливо неравенство*

$$\int\limits_{X_\gamma} |Tf(x)| d\mu(x) \leq A \int\limits_{X_\gamma} f(x) \cdot \ln(f(x) + 1) d\mu(x) + B \int\limits_{X_\gamma} f(x) d\mu(x) + \varepsilon,$$

где A *и* B *суть константы, зависящие от* ε*, но не от* f*.*

В частных случаях это неравенство как правило следует непосредственно из общего вида оператора, причем с $k = \gamma = 0$.

Порой в гармоническом анализе возникают приближения не последовательностью операторов, а семейством операторов, которые образуют лишь частично упорядоченное множество. Самый распространенный

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00417).

пример — кратные ряды Фурье. Чтобы работать с такими семействами, вспомним понятие направленности (см. [1, с. 12]).

Определение. Непустое множество A называется *направленным*, если на нем задан частичный порядок, удовлетворяющий следующему условию: для любых $m, n \in A$ найдется элемент $k \in A$ такой, что $m \le k$ и $n \le k$. *Направленностью* в множестве X называется набор элементов $\{x_n\}_{n\in A}$, индексируемых элементами направленного множества. Направленность $\{x_n\}_{n\in A}$ в топологическом пространстве X сходится к элементу x, если для любого непустого открытого множества U, содержащего x, найдется такой элемент $n_0 \in A$, что $x_n \in U$ для всех $n \ge n_0$, $n \in A$. Понятным образом определяется *сходимость числовых направленностей*, а также *поточечная сходимость* и *сходимость почти всюду направленностей числовых функций*.

Пусть $\{T_n\}_{n\in A}$ — направленность линейных операторов, переводящих $L^0(X,\mu)$ в себя. Максимальным оператором относительного данного семейства операторов называется оператор $T : f(x) \mapsto \sup\limits_{n\in A} |T_n f(x)|$. Будем рассматривать лишь счетные направленности, т.е. такие, что множество A счетно — это гарантирует измеримость функции $Tf(x)$. Оператор T оказывается выпуклым.

Аналогично [2, теорема 5.1.3] доказывается следующий результат.

Теорема 2. *Пусть направленность линейных операторов* $\{T_n\}_{n\in A}$ *такова, что соответствующий максимальный оператор* T *имеет слабый тип* $(1,1)$*, и пусть для любой функции* ϕ *из всюду плотного в* $L^1(X,\mu)$ *множества* $\lim\limits_{n\in A} T_n\phi(x) = \phi(x)$ *почти всюду на* X*. Тогда для любой функции* $f \in L^1(X,\mu)$ *выполняется* $\lim\limits_{n\in A} T_n f(x) = f(x)$ *почти всюду на* X*.*

Нас будут интересовать направленности лишь интегральных операторов, то есть операторов вида $Tf(x) = \int\limits_X K(x,y)\cdot f(y)d\mu(y)$.

Если интегральные операторы T^i с ядрами $K_i(\cdot,\cdot)$ заданы на $L^1(X^i,\mu^i)$, $i = 1,2$, то определим их тензорное произведение как интегральный оператор $T^1 \hat{\otimes} T^2$, действующий в $L^1(X^1 \times X^2, \mu^1 \otimes \mu^2)$ с ядром $K_1(\cdot,\cdot)\cdot K_2(\cdot,\cdot)$.

Для двух направленностей операторов $\{T^1_{n^1}\}_{n^1\in A^1}$ и $\{T^2_{n^2}\}_{n^2\in A^2}$ их тензорным произведением назовем направленность $\{T^1_{n^1} \hat{\otimes} T^2_{n^2}\}_{\mathbf{n}\in A}$, где $\mathbf{n} = (n^1,n^2), A = A^1 \times A^2$, причем $(n^1,n^2) > (m^1,m^2)$ тогда и только тогда, когда $n^1 > m^1$ и $n^2 > m^2$. Тензорное произведение большего числа слагаемых определяется очевидным образом.

Теорема 3. *Пусть* (X^i, μ^i), $i = 1, \dots, D$ — *измеримые пространства конечной меры,* $X = \prod_{i=1}^{D} X^i$, $\mu = \bigotimes_{i=1}^{D} \mu^i$, $\{T^i_{n^i}\}_{n^i \in A^i}$, $i = 1, \dots, D$, — *направленности линейных интегральных операторов, действующих в соответстующих* $L^1(X^i, \mu^i)$, *таких, что каждый максимальный оператор* T^i *имеет слабый тип (1,1) и, кроме того, для любого* $i = 1, \dots, D$ *и любой ограниченной функции* $\phi \in L^1(X^i, \mu^i)$ *выполнено* $\lim\limits_{n^i \in A^i} T^i_{n^i}\phi(x) = \phi(x)$ μ^i*-почти всюду.*

Тогда для любой $f \in L^1(X)$ *такой, что* $f \cdot \ln(|f| + 1) \in L^1(X)$, *выполнено* $\lim\limits_{\boldsymbol{n} \in A} T_{\boldsymbol{n}} f(x) = f(x)$ μ*-почти всюду, где* A — *произвольная поднаправленность тензорного произведения направленностей* $\{T^i_{n^i}\}_{n^i \in A^i}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богачев В. И.* Основы теории меры : в 2 т. Т. 2. М.; Ижевск : НИЦ Регулярная и Хаотическая динамика, 2006. 680 с.

2. *Голубов Б. И.,Ефимов А. В.,Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. М. : Изд. ЛКИ, 2008. 352 с.

УДК 517.512

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С МАЛЫМИ ПРОПУСКАМИ

Ю. Х. Хасанов, Ф. М. Талбаков (Душанбе, Таджикистан)

yukhas60@mail.ru

Пусть $f(x)$ — интегрируемая на отрезке $[-\pi, \pi]$ периодическая функция и имеет ряда Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=\infty}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{1}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ntdt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ntdt.$$

Определение 1. Говорят, что *ряд Фурье функции* $f(x)$ *имеет пропуски*, если $a_n^2 + b_n^2 > 0$ только для $n = n_k$ $(k = 1, 2, ...)$, где $1 < n_1 < n_2 < ...$ — натуральные числа.

Пусть $f(x)$ — непрерывная функция с ограниченным изменением на отрезка $[-\eta, \eta]$, где $0 < \eta < \pi$, а последовательность $\{n_k\}$ $(k = 1, 2, ...)$ удовлетворяет условию малых пропусков, т.е.

$$n_{k+1} - n_k \geq \frac{4\pi}{\eta} \tag{2}$$