СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Beasley J.E., Meade N., Chang T.-J.* An evolutionary heuristic for the index tracking problem // European J. Operational Research. 2003. Vol. 148. P. 621–643.

2. *Chang T.J. , Meade N., Beasley J.E., Sharaiha Y.M.* Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation // Computers & Operations Research. 2003. Vol. 27. P. 1271–1302.

3. *8Woodside-Oriakhi M., Lucas C., Beasley J.E.* Heuristic algorithms for the cardinality constrained efficient frontier // European J. Operational Research. 2011. Vol. 213. P. 538–550.

4. *Canagkoz N.A., Beasley J.E.* Mixed-integer programming approaches for index tracking and enhanced indexation // European J. Operational Research. 2008. Vol. 196(1). P. 384–399.

5. *Derigs U., Nickel N.-H.* Meta-heuristic based decision support for portfolio optimization with a case study on tracking error minimization in passive portfolio management // OR Spectrum. 2003. Vol. 25. P. 345–378.

6. *Maringer D., Oyewumi O.* Index tracking with constrained portfolios // Intell. Syst. Account., Finance Mgmt. 2007. Vol. 15. P. 57–71.

7. *Gilli M., Winker P.* Heuristic optimization methods in econometrics. *In Handbook of Computational Econometircs*, edited by D. Beasley and E. Kontoghiorghes. Wiley : Chichester. 2009. P. 81–120.

8. *Maringer D.* Portfolio Management with Heuristic Optimization. Berlin : Springer, 2005.

9. *Das A., Kempe D.* Submodular meets spectral: Greedy algorithms for subset selection,sparse approximation and dictionary selection // Proc. Intern. Conf. on Machine Learning. 2011.

10. *Temlyakov V. N.* Greedy Approximation in Convex Optimization // Constr. Approx. 2015. Vol. 41(2). P. 269–296.

11. *Takeda A., Niranjan M., Gotoh J., Kawahara Y.* Simultaneous pursuit of out-of-sample performance and sparsity in index tracking portfolios // Comput. Manag. Sci. 2013. Vol. 10, № 1. P. 21–49.

УДК 517.518

ФРЕЙМЫ ПАРСЕВАЛЯ В АНАЛИЗЕ УОЛША

Ю. А. Фарков (Москва, РФ)
farkov@list.ru

Функции Уолша и их обобщения являются характерами аддитивных абелевых групп Кантора и Виленкина (см., например, [1, 2]). Напомним, что для данного целого $p \geq 2$ группа Виленкина G_p состоит из последовательностей $x = (x_j)$, где $x_j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, $j \in \mathbb{Z}$, и только конечное число x_j с отрицательными индексами могут быть отличными от нуля. Операция сложения на G_p определяется как покоординатное сложение по модулю p:

$$(z_j) = (x_j) \oplus (y_j) \iff z_j = x_j + y_j \pmod{p} \quad \text{для всех} \quad j \in \mathbb{Z},$$

а топология вводится с помощью системы окрестностей нуля:

$$U_l = \{(x_j) \in G_p \,:\, x_j = 0 \quad \text{для всех } j \le l\}, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Группа G_p локально компактна и самодвойственна, причем отношение двойственности вводится по формуле

$$\chi(x, \omega) = \exp\left(\frac{2\pi i}{p} \sum_{j\in\mathbb{Z}} x_j\, \omega_{1-j}\right), \quad x, \omega \in G_p.$$

Локально компактная канторова группа $\mathcal{C}$ изоморфна группе G_2. Равенство $z = x \ominus y$ означает, что $z \oplus y = x$ (при $p = 2$ операции $\oplus$ и $\ominus$ совпадают).

Положим для краткости $G = G_p$ и $U = U_0$ (в случае $p = 2$ подгруппа U группы G изоморфна компактной канторовой группе). Выберем в G дискретную подгруппу $H = \{(x_j) \in G \,:\, x_j = 0 \text{ для } j > 0\}$ и определим автоморфизм $A \in \operatorname{Aut} G$ по формуле $(Ax)_j = x_{j+1}$, $x = (x_j) \in G$. Легко видеть, что фактор-группа $H/A(H)$ содержит p элементов и что $\chi(Ax, \omega) = \chi(x, A\omega)$ для всех $x, \omega \in G$. Отображение $\lambda : G \to [0, +\infty)$ определим по формуле

$$\lambda(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} x_j p^{-j}, \qquad x = (x_j) \in G.$$

Образом подгруппы H при отображении λ является множество целых неотрицательных чисел: $\lambda(H) = \mathbb{Z}_+$. Для каждого $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ через $h_{[\alpha]}$ обозначим элемент из H такой, что $\lambda(h_{[\alpha]}) = \alpha$; в частности, $h_{[0]}$ совпадает с нулевым элементом группы G. *Функции Уолша* для группы G могут быть заданы равенством

$$W_\alpha(x) = \chi(x, h_{[\alpha]}), \qquad \alpha \in \mathbb{Z}_+,\ x \in G.$$

Эти функции непрерывны на G и удовлетворяют соотношениям ортогональности

$$\int_U W_\alpha(x) \overline{W_\beta(x)} d\mu(x) = \delta_{\alpha,\beta}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+,$$

где $\delta_{\alpha,\beta}$ — символ Кронекера. Известно также, что при $\alpha \le p^n - 1$ функция W_α постоянна на каждом из множеств

$$U_{n,s} = A^{-n}(h_{[s]}) \oplus A^{-n}(U), \quad 0 \le s \le p^n - 1.$$

Дискретное преобразование Виленкина – Крестенсона переводит данный вектор $(b_0, b_1, \ldots, b_{p^n-1})$ в вектор $(a_0, a_1, \ldots, a_{p^n-1})$, компоненты которого вычисляются по формулам

$$a_\alpha = \frac{1}{p^n} \sum_{s=0}^{p^n-1} b_s W_\alpha(A^{-n} h_{[s]}), \quad 0 \le \alpha \le p^n - 1. \tag{1}$$

Обратное преобразование определяется формулами

$$b_s = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \, \overline{W_\alpha(A^{-n} h_{[s]})}, \qquad 0 \le s \le p^n - 1. \tag{2}$$

Существуют быстрые алгоритмы реализации этих дискретных преобразований (см., например, [1, с. 256]).

Пространство Лебега $L^2(G)$ определяется по мере Хаара μ, заданной на борелевских множествах в G и нормированной условием $\mu(U) = 1$. Обозначим через $\langle \cdot \, , \cdot \rangle$ и $\| \cdot \|$ скалярное произведение и норму в $L^2(G)$, а через $\widehat{f}$ — преобразование Фурье функции f. Для любых $f, g \in L^2(G)$ имееет место равенство Парсеваля $\langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle = \langle f, g \rangle$.

Для данного множества $\Psi := \{\psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(r)}\} \subset L^2(G)$, $r \ge p - 1$, *система всплесков* $X(\Psi)$ определяется по формуле

$$X(\Psi) := \{\psi_{j,k}^{(\nu)} \; : \; 1 \le \nu \le r, \; j \in \mathbb{Z}, \; k \in \mathbb{Z}_+\},$$

где

$$\psi_{j,k}^{(\nu)}(x) = p^{j/2} \psi^{(\nu)}(A^j x \ominus h_{[k]}), \quad x \in G.$$

Система $X(\Psi)$ называется *фреймом Парсеваля* для $L^2(G)$, если для всех $f \in L^2(G)$ выполнено равенство

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \sum_{\nu=1}^{r} |\langle f \, , \psi_{j,k}^{(\nu)} \rangle|^2 = \|f\|^2.$$

Основополагающие факты теории всплесковых фреймов содержатся в [3]. Первые примеры фреймов на канторовой группе $\mathcal{C}$ построены в [4]. Наименьшее значение константы в диадическом принципе неопределенности получено [5] на одном из этих фреймов. Приведем алгоритмы построения фреймов Парсеваля на группе G, основанные на принципе унитарного продолжения и недавних результатах из [6]. Элементы $\delta_l \in U$ определим условием $\lambda(\delta_l) = l/p$, где $l \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$.

Алгоритм А.

- **Шаг 1**. Выбрать числа b_s, $0 \le s \le p^n - 1$, такие, что

$$b_0 = 1, \quad |b_l|^2 + |b_{l+p^{n-1}}|^2 + \cdots + |b_{l+(p-1)p^{n-1}}|^2 = 1, \tag{3}$$

где $0 \le l \le p^{n-1} - 1$.

- **Шаг 2**. Вычислить a_α, $0 \le \alpha \le p^n-1$, по формулам (1) и определить полином Уолша

$$m_0(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \overline{W_\alpha(\omega)}. \tag{4}$$

- **Шаг 3**. Найти функцию $\varphi \in L^2(G)$ такую, что

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(A^{-j}\omega), \quad \omega \in G.$$

- **Шаг 4**. Найти полиномы Уолша

$$m_\nu(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha^{(\nu)} \overline{W_\alpha(\omega)}, \quad 1 \le \nu \le p-1,$$

такие, что матрица

$$\begin{pmatrix} m_0(\omega) & m_1(\omega) & \dots & m_{p-1}(\omega) \\ m_0(\omega \oplus \delta_1) & m_1(\omega \oplus \delta_1) & \dots & m_{p-1}(\omega \oplus \delta_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_0(\omega \oplus \delta_{p-1}) & m_1(\omega \oplus \delta_{p-1}) & \dots & m_{p-1}(\omega \oplus \delta_{p-1}) \end{pmatrix}$$

унитарна при каждом $\omega \in G$.

- **Шаг 5**. Определить функции $\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(p-1)}$ по формулам

$$\psi^{(\nu)}(x) = p \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha^{(\nu)} \varphi(Ax \ominus h_{[\alpha]}), \quad 1 \le \nu \le p-1.$$

Алгоритм B.

- **Шаг 1**. Выбрать числа b_s, $0 \le s \le p^n - 1$, такие, что

$$b_0 = 1, \quad |b_l|^2 + |b_{l+p^{n-1}}|^2 + \dots + |b_{l+(p-1)p^{n-1}}|^2 \le 1, \tag{5}$$

где $0 \le l \le p^{n-1} - 1$.

- **Шаги 2 и 3** как в алгоритме A.

- **Шаг 4**. Для данного $r \ge p$ найти полиномы Уолша

$$m_\nu(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha^{(\nu)} \overline{W_\alpha(\omega)}, \quad 1 \le \nu \le r,$$

такие, что строки матрицы

$$\begin{pmatrix} m_0(\omega) & m_1(\omega) & \dots & m_r(\omega) \\ m_0(\omega \oplus \delta_1) & m_1(\omega \oplus \delta_1) & \dots & m_r(\omega \oplus \delta_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_0(\omega \oplus \delta_{p-1}) & m_1(\omega \oplus \delta_{p-1}) & \dots & m_r(\omega \oplus \delta_{p-1}) \end{pmatrix}$$

при каждом $\omega \in G$ образуют ортонормированную систему.

- **Шаг 5**. Определить функции $\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(r)}$ по формулам

$$\psi^{(\nu)}(x) = p \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha^{(\nu)} \varphi(Ax \ominus h_{[\alpha]}), \quad 1 \le \nu \le r,$$

или, в терминах преобразований Фурье, по формулам

$$\widehat{\psi}^{(\nu)}(\omega) = m_\nu(A^{-1}\omega)\widehat{\varphi}(A^{-1}\omega), \quad 1 \le \nu \le r.$$

Теорема. *Пусть множество всплесков $\Psi = \{\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(r)}\}$ определено для $r = p-1$ по алгоритму A и для $r \ge p$ по алгоритму B. Тогда система $X(\Psi)$ является фреймом Парсеваля для $L^2(G)$.*

При переходе от первого алгоритма ко второму множество исходных векторов $(b_0, b_1, \dots, b_{p^n-1})$ расширяется (сравните (3) и (5)), что компенсируется увеличением числа всплесков $\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(r)}$. Корректность определения функции $\varphi \in L^2(G)$ на шаге 3 алгоритма B следует из [6, теорема 11]. Поскольку $\widehat{\varphi}(\omega) = m_0(A^{-1}\omega)\widehat{\varphi}(A^{-1}\omega)$, функция φ удовлетворяет масштабирующему уравнению

$$\varphi(x) = p \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \varphi(Ax \ominus h_{[\alpha]}), \quad x \in G, \tag{6}$$

а полином (4) является *маской* уравнения (6).

Из формул (2) и (4) следует, что $b_s = m_0(A^{-n}h_{[s]})$ для $s = 0, 1, \dots, p^n - 1$. Для значений b_s маски m_0 масштабирующего уравнения (6) условия (3) являются следствием ортонормированности системы H-сдвигов решения φ этого уравнения (см. [8, предложение 3.2]). Более того, согласно [8, с.210], если в дополнение к условиям (3) потребовать, что $b_j \ne 0$ при $0 \le j \le p^{n-1} - 1$ (это означает, что $m_0(A^{-1}\omega) \ne 0$ при $\omega \in U$), то решение φ уравнения (6) порождает кратномасштабный анализ в $L^2(G)$ и алгоритм A приводит к ортонормированному базису всплесков в $L^2(G)$

(сравните с алгоритмами в [9] и [10]). Алгоритм построения ортонормированных базисов в L^2-пространстве периодических комплексных последовательностей с периодом $N = p^n$ по векторам $(b_0, b_1, \dots, b_{p^n-1})$, удовлетворяющим условиям (3), изложен в [11]. Обобщения на биортогональный случай даны в [9] и [12], а основные конструкции периодических всплесков на группе G, дополняющие стандартную процедуру периодизации, приведены в [13].

При построении фреймов система H-сдвигов решения φ масштабирующего уравнения (6) может быть линейно зависимой. В общем случае для вычисления значений $\widehat{\varphi}(\omega)$ на шаге 3 алгоритмов A и B можно воспользоваться формулой (2.18) из [8]. Некоторые методы реализации шага 4 в алгоритмах A и B указаны в [6] и [9]. Известно [6, § 5], что в пространствах типа Соболева $W_m^2(G)$ разложения по полученным фреймам имеют произвольный порядок аппроксимации. Особенно простые разложения получаются по фреймам на группе G, для которых масштабирующие функции φ являются конечными линейными комбинациями функций Уолша (см. [7, теорема 3.9]). Отметим также, что применяемые для обработки сигналов дискретные всплесковые преобразования могут быть определены по любому набору векторов $(b_0, b_1, \dots, b_{p^n-1})$, удовлетворяющему условиям (3) или (5), и для некоторых сигналов решена задача об оптимальном выборе таких наборов по энтропийному и иным критериям (см. библиографию в [7]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. Изд. 2-е. М. : Изд-во ЛКИ, 2008. 352 с.

2. *Schipp F., Wade W. R., Simon P.* Walsh Series: An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis. N. Y. : Adam Hilger, 1990. 545 p.

3. *Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А.* Теория всплесков. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. 616 с.

4. *Farkov Yu. A.* Examples of frames on the Cantor dyadic group // J. Math. Sc. 2012. Vol. 187, № 1. P. 22–34.

5. *Krivoshein A. V., Lebedeva E. A.* Uncertainty principle for the Cantor dyadic group // J. Math. Anal. Appl. 2015. Vol. 423, № 2. P. 1231–1242.

6. *Farkov Yu. A., Lebedeva E. A., Skopina M. A.* Wavelet frames on Vilenkin groups and their approximation properties // Intern. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. 2015. Vol. 13, № 5. 1550036 (19 pages).

7. *Farkov Yu. A.* Constructions of MRA-based wavelets and frames in Walsh analysis // Poincare J. Anal. Appl. 2015. Vol. 2. Special Issue (IWWFA-II, Delhi). P. 13–36.

8. *Фарков Ю. А.* Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69, № 3. С. 193–220.

9. *Farkov Yu. A., Rodionov E. A.* Algorithms for wavelet construction on Vilenkin groups // p-Adic Numb. Ultr. Anal. Appl. 2011. Vol. 3, № 1. P. 181–195.

10. *Berdnikov G. S., Lukomskii S. F.* N-Valid trees in wavelet theory on Vilenkin groups // Intern. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. 2015. Vol. 13, № 5. 1550037 (23 pages).

11. *Фарков Ю. А.* Дискретные вейвлеты и преобразование Виленкина – Крестенсона // Матем. заметки. 2011. Т. 89, № 6. С. 914–928.

12. *Farkov Yu. A., Rodionov E. A.* On biorthogonal discrete wavelet bases // Intern. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. 2015. Vol. 13, № 1. 1550002 (18 pages).

13. *Farkov Yu. A.* Periodic wavelets in Walsh analysis // Communic. Math. Appl. 2012. Vol. 3, № 3. P. 223–242.

УДК 517.98

СХОДИМОСТЬ ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ НАПРАВЛЕННОСТЕЙ[1]

Д. В. Фуфаев (Москва, РФ)
fufaevdv@rambler.ru

Пусть (X, μ) — пространство с мерой, а оператор T действует из $L^0(X, \mu)$ в $L^0(X, \mu)$. Назовем T выпуклым, если из существования Tf_1 и Tf_2 следует существование $T(f_1 + f_2)$ и при этом $|T(f_1 + f_2)(x)| \leq |Tf_1(x)| + |Tf_2(x)|$. Будем говорить, что выпуклый оператор T имеет слабый тип $(1, 1)$ с константой C, если для любого $\lambda > 0$ и для любой функции $f \in L^1(X, \mu)$ выполняется следующее неравенство:

$$\mu\{x \in X : |Tf(x)| > \lambda\} \leq \frac{C}{\lambda}||f||_{L^1(X,\mu)}.$$

Теорема 1 (неравенство Харди – Литтльвуда).
Пусть $\mu(X) < \infty$, $f \in L^1(X), f \cdot \ln(f + 1) \in L^1(X), f \geq 0$, T *— оператор слабого типа* $(1, 1)$ *и задано* $\varepsilon > 0$. *Тогда для любого* $\gamma > 0$ *найдется множество* $X_\gamma \subset X$ *такое, что* $\mu(X_\gamma) > \mu(X) - \gamma$ *и справедливо неравенство*

$$\int\limits_{X_\gamma} |Tf(x)| d\mu(x) \leq A \int\limits_{X_\gamma} f(x) \cdot \ln(f(x) + 1) d\mu(x) + B \int\limits_{X_\gamma} f(x) d\mu(x) + \varepsilon,$$

где A *и* B *суть константы, зависящие от* ε, *но не от* f.

В частных случаях это неравенство как правило следует непосредственно из общего вида оператора, причем с $k = \gamma = 0$.

Порой в гармоническом анализе возникают приближения не последовательностью операторов, а семейством операторов, которые образуют лишь частично упорядоченное множество. Самый распространенный

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00417).