УДК 517.984

ЖАДНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РЕПЛИКАЦИИ ИНДЕКСА[1]

А. Р. Файзлиев, С. П. Сидоров, А. А. Хомченко
(Саратов, РФ)
faizlievar1983@mail.ru

Для $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ положим $\|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$ и $\|x\|_0 = \lim_{q \to 0+} \|x\|_q =$ (число ненулевых элементов вектора x). Обозначим r_{ti} — доходность актива i в момент t, $R = (r_{ti})$, $1 \le i \le n$, $1 \le t \le m$. Портфель определяется как вектор весов активов, $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Пусть I_t есть доходность индекса в момент времени t, $1 \le t \le m$, и $I = (I_1, \dots, I_m)^T \in \mathbb{R}^m$. Мы не позволяем изменять портфель в течение инвестиционного периода и не учитываем транзакционные издержки. Мы будем полагать, что короткие продажи допустимы, т.е. веса x_i могут быть отрицательными; инвестор имеет одну единицу капитала, т.е. $x^T 1_n = 1$, где 1_n означает вектор из $\mathbb{R}^n$, в котором каждый компонент равен 1. В традиционной задаче слежения за индексом цель состоит в нахождении портфеля, который имеет минимальное значение дисперсии ошибки слежения, т.е. суммы квадратов отклонений между доходностями портфеля и рыночным индексом:

$$x^* = \arg\min \frac{1}{m} \|I - Rx\|_2^2 \;\; s.t. \;\; x^T 1_n = 1. \tag{1}$$

Рассмотрим задачу минимизации (1) с ограничением на кардинальность:

$$x^* = \arg\min \frac{1}{m} \|I - Rx\|_2^2 \;\; s.t. \;\; x^T 1_n = 1, \; \|x\|_0 \le K, \tag{2}$$

где K есть ограничение на количество активов в портфеле с ненулевыми весами. Обычно предполагается, что K значительно меньше общего числа активов n, $K \ll n$.

Задача слежения за индексом с ограничением на кардинальность является задачей неполиномиальной сложности и поэтому обычно требует разработки алгоритмов эвристического поиска, таких, как генетические алгоритмы или алгоритм дифференциальной эволюции [1–8]. Хотя эти алгоритмы и приводят к получению достаточно точного решения задачи, при этом они требуют использования больших вычислительных мощностей, возможностей распараллеливания, временных затрат на подбор

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00140).

оптимальных параметров, а также больших объемов вычислений и времени выполнения. Хороший обзор может быть найден в работах [1, 4, 8]. Жадные алгоритмы не обладают этими недостатками и также доказали свою эффективность [9]. Свойства жадных алгоритмов для решения задач выпуклой оптимизации получены в работе [10].

Пусть $N = \{1, \ldots, n\}$ есть индексное множество инвестиционных активов. Жадный алгоритм для решения задачи (2) в норме l_2 был рассмотрен, в частности, в работе [11]. Алгоритм на каждом шаге своей работы добавляет в портфель актив, который еще не входит в портфель и который наиболее (в некотором смысле) «близок» к индексу. Процесс включения новых активов в портфель продолжается до тех пор, пока в портфеле не окажется ровно K активов.

Обозначим $M_k \subset N$ подмножество индексного множества N, соответствующее k ненулевым элементам x. Обозначим $\widetilde{R}_{M_k}$ подматрицу матрицы доходностей R размерности $(m \times |M_k|)$, в которую вошли столбцы M_k. Тогда задача (2) с $x_i = 0$ для $i \in N \setminus M_k$ будет иметь вид

$$\widetilde{x}^* = \arg\min_{\widetilde{x}} \|I - \widetilde{R}_{M_k}\widetilde{x}\|_2^2 \;\; s.t. \; \widetilde{x}^T 1_{|M_k|} = 1, \; \widetilde{x} \in \mathbb{R}^{|M_k|}. \tag{3}$$

Обозначим $f(M_k) := \|I - \widetilde{R}_{M_k}\widetilde{x}^*\|_2^2$. Оптимальное решение задачи (3) может быть найдено методом Лагранжа:

$$\widetilde{x}_{M_k} = (\widetilde{R}_{M_k}^T \widetilde{R}_{M_k})^{-1}(\widetilde{R}_{M_k}^T I - \lambda e_k), \tag{4}$$

и $\lambda = \frac{1_k^T (\widetilde{R}_{M_k}^T \widetilde{R}_{M_k})^{-1} \widetilde{R}_{M_k}^T I - 1}{1_k^T (\widetilde{R}_{M_k}^T \widetilde{R}_{M_k})^{-1} 1_k}$.

Algorithm 1: Жадный алгоритм в L_2

---

begin
- Пусть $M_0 = \varnothing$ и $k = 1$. Положить $f(M_0)$ достаточно большим.
- **while** $k \leq K$ **do**
  - $\forall s \in N \setminus M_{k-1}$ вычислить $\widetilde{x}_{M_{k-1} \cup \{s\}}$, используя (4).
  - Выбрать $s^* = \arg\min_{s \in N \setminus M_{k-1}} f(M_{k-1} \cup \{s\})$ и положить $\widetilde{x}_{M_k} = \widetilde{x}_{M_{k-1} \cup \{s^*\}}$.
  - Положить $M_k = M_{k-1} \cup \{s^*\}$ и $k = k + 1$.
- Присвоить $x_G = \widetilde{x}_{M_K}$ и $M_G = M_K$.
- Вернуть x_G и M_G.

end

В выступлении мы представим оценки скорости сходимости алгоритма и эмпирический анализ работы алгоритма на реальных данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Beasley J.E., Meade N., Chang T.-J.* An evolutionary heuristic for the index tracking problem // European J. Operational Research. 2003. Vol. 148. P. 621–643.

2. *Chang T.J. , Meade N., Beasley J.E., Sharaiha Y.M.* Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation // Computers & Operations Research. 2003. Vol. 27. P. 1271–1302.

3. *8Woodside-Oriakhi M., Lucas C., Beasley J.E.* Heuristic algorithms for the cardinality constrained efficient frontier // European J. Operational Research. 2011. Vol. 213. P. 538–550.

4. *Canagkoz N.A., Beasley J.E.* Mixed-integer programming approaches for index tracking and enhanced indexation // European J. Operational Research. 2008. Vol. 196(1). P. 384–399.

5. *Derigs U., Nickel N.-H.* Meta-heuristic based decision support for portfolio optimization with a case study on tracking error minimization in passive portfolio management // OR Spectrum. 2003. Vol. 25. P. 345–378.

6. *Maringer D., Oyewumi O.* Index tracking with constrained portfolios // Intell. Syst. Account., Finance Mgmt. 2007. Vol. 15. P. 57–71.

7. *Gilli M., Winker P.* Heuristic optimization methods in econometrics. *In Handbook of Computational Econometircs*, edited by D. Beasley and E. Kontoghiorghes. Wiley : Chichester. 2009. P. 81–120.

8. *Maringer D.* Portfolio Management with Heuristic Optimization. Berlin : Springer, 2005.

9. *Das A., Kempe D.* Submodular meets spectral: Greedy algorithms for subset selection,sparse approximation and dictionary selection // Proc. Intern. Conf. on Machine Learning. 2011.

10. *Temlyakov V. N.* Greedy Approximation in Convex Optimization // Constr. Approx. 2015. Vol. 41(2). P. 269–296.

11. *Takeda A., Niranjan M., Gotoh J., Kawahara Y.* Simultaneous pursuit of out-of-sample performance and sparsity in index tracking portfolios // Comput. Manag. Sci. 2013. Vol. 10, № 1. P. 21–49.

УДК 517.518

ФРЕЙМЫ ПАРСЕВАЛЯ В АНАЛИЗЕ УОЛША

Ю. А. Фарков (Москва, РФ)
farkov@list.ru

Функции Уолша и их обобщения являются характерами аддитивных абелевых групп Кантора и Виленкина (см., например, [1, 2]). Напомним, что для данного целого $p \geq 2$ группа Виленкина G_p состоит из последовательностей $x = (x_j)$, где $x_j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, $j \in \mathbb{Z}$, и только конечное число x_j с отрицательными индексами могут быть отличными от нуля. Операция сложения на G_p определяется как покоординатное сложение по модулю p:

$$(z_j) = (x_j) \oplus (y_j) \iff z_j = x_j + y_j \pmod p \quad \text{для всех} \quad j \in \mathbb{Z},$$