5. *Трушкова Е. А.* Синтез оптимальных траекторий для линейных систем с трехточечным смешанным условиям // Материалы XIX Межд. конф. по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2015). Алушта : Изд-во МАИ, 2015. С. 665–667.

УДК 517.518.85

О НЕКОТОРЫХ ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ СИНК-АППРОКСИМАЦИЙ[1]

А. Ю. Трынин (Саратов, РФ)
tayu@rambler.ru

В качестве инструмента приближения функций в теории кодирования сигналов Э. Борель и Э.Т. Уиттекер предложили рассматривать кардинальную функцию и усечённую кардинальную функцию, сужение на отрезок $[0, \pi]$ которых выглядит так:

$$L_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(nx - k\pi)}{nx - k\pi} f\Big(\frac{k\pi}{n}\Big) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi} f\Big(\frac{k\pi}{n}\Big)$$

Обозначим $x_{k,n} = \frac{k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$. Для любых $0 \le a < b \le \pi$, $0 < \varepsilon < (b - a)/2$ положим

$$Q_n(f, [a, b], \varepsilon) := \max_{p_1 \le p \le p_2} \Bigg| {\sum_{m=m_1}^{m_2}}' \frac{f(x_{2m+1,n}) - f(x_{2m,n})}{p - 2m} \Bigg|.$$

Штрих у суммы означает отсутствие слагаемого со знаменателем равным нулю, а индексы p_1, p_2, m_1 и m_2 определяются неравенствами

$$x_{p_1,n} \le a + \varepsilon < x_{p_1+1,n}, \quad x_{p_2,n} \le b - \varepsilon < x_{p_2+1,n},$$

$$x_{k_1-1,n} < a \le x_{k_1,n}, \quad x_{k_2,n} \le b < x_{k_2+1,n},$$

$$m_1 = \left[\frac{k_1}{2}\right] + 1, \quad m_2 = \left[\frac{k_2}{2}\right].$$

Здесь $[z]$ обозначает целую часть числа z.

Теорема 1. *Если функция $f \in C[a, b]$, то из соотношения*

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(f, [a, b], \varepsilon) = 0 \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00102).

следует

$$\lim_{n\to\infty} \|f - L_n(f,\cdot)\|_{C[a+\varepsilon,b-\varepsilon]} = 0. \qquad (2)$$

Обозначим через Ω —множество действительных непрерывных неубывающих, выпуклых вверх на $[a,b]$, исчезающих в нуле функций ω. А через $C(\omega^l,[a,b])$ и $C(\omega^r,[a,b])$ — совокупность элементов $C[a,b]$ таких, что для любых x и $x+h$ ($a \le x < x+h \le b$) справедливы неравенства

$$f(x+h) - f(x) \ge -K_f\omega(h) \text{ или } f(x+h) - f(x) \le K_f\omega(h)$$

соответственно, где $\omega \in \Omega$. Выбор положительных констант K_f может зависеть только от функции f. В этом случае функцию $\omega(h)$ иногда называют, соответственно, левосторонним или правосторонним модулем непрерывности. Классический модуль непрерывности будем обозначать как обычно $\omega(f,\delta) = \sup\limits_{|h|<\delta; x,x+h\in[a,b]} |f(x+h) - f(x)|$.

По аналогии с положительным (отрицательным) изменением функции назовём модулем положительного (отрицательного) изменения функции f на отрезке $[a,b]$ соответственно функции натурального аргумента вида

$$v^+(n,f) = \sup_{T_n}\sum_{k=0}^{n-1}\big(f(t_{k+1}) - f(t_k)\big)_+ \text{и } v^-(n,f) = \inf_{T_n}\sum_{k=0}^{n-1}\big(f(t_{k+1}) - f(t_k)\big)_-,$$

где $z_+ = \frac{z+|z|}{2}$ и $z_- = \frac{z-|z|}{2}$ и $T_n = \{a \le t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n \le b\}$, $n \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что f принадлежит классам $V^+(v)$ или $V^-(v)$, если для неё найдётся такая константа M_f, что для любого натурального n будут справедливы неравенства

$$v^+(n,f) \le M_f v(n) \text{ или } v^-(n,f) \ge -M_f v(n)$$

соответственно. Кроме того, обозначим функциональный класс $V(v) = V^+(v) \cap V^-(v)$ и классический модуль изменения $v(n,f) = v^+(n,f) - v^-(n,f)$.

Теорема 2. *Пусть $0 \le a < b \le \pi$, $0 < \varepsilon < (b-a)/2$. Если неубывающая выпуклая вверх функция натурального аргумента $v(n)$ и функция $\omega \in \Omega$ такие, что*

$$\lim_{n\to\infty} \min_{1\le m\le k_2-k_1-1}\Big\{\omega\Big(\frac{\pi}{n}\Big)\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} + \sum_{k=m+1}^{k_2-k_1-1}\frac{v(k)}{k^2}\Big\} = 0, \qquad (3)$$

где k_1 *и* k_2 *— номера наименьшего и наибольшего из узлов* $x_{k,n} = k\pi/n$, *попадающих в отрезок* $[a,b]$, *то для любой функции* $f \in C(\omega^l[a,b]) \cap \cap V^-(v)$ $(f \in C(\omega^r[a,b]) \cap V^+(v))$ *имеет место равномерная сходимость* (2).

В [1] доказано, что условие аналогичное (1) или, в случае когда $f \in C(\omega^l[a,b]) \cap V(v)$ или $f \in C(\omega^r[a,b]) \cap V(v)$ (v является мажорантой *классического* модуля изменения $v(n,f)$), условие вида (3) являются достаточными для равномерной сходимости тригонометрических интерполяционных процессов и последовательностей классических интерполяционных многочленов Лагранжа по матрице интерполирования П. Л. Чебышёва. В работе [2] установлена равномерная сходимость тригонометрических рядов Фурье для $2\pi-$периодичесих функций из класса $f \in C(\omega[a,b]) \cap V(v)$, где функии ω и v являются мажорантами *классических* модуля непрерывности $\omega(f,\delta)$ и модуля изменетя $v(n,f)$.

Из теоремы 2 следует, что если $f_1 \in C(\omega_1^r[a,b]) \cap V^+(v_1)$, а $f_2 \in \in C(\omega_2^l[a,b]) \cap V^-(v_2)$, и обе пары функций $(v_i,\, \omega_i)$, где $i = 1,2$, удовлетворяют соотношению (3), то, хотя линейная комбинация $f = \alpha f_1 + \beta f_2$ может не принадлежать ни одному из этих классов, тем не менее, в силу линейности оператора L_n, для f будет иметь место равномерная сходимость (2) внутри интервала (a,b).

Несложно проверить, что каждый из классов функций: удовлетворяющих условию Дини – Липшица $\lim\limits_{n\to\infty} \omega(f,1/n)\ln n = 0$, и, удовлетворяющих условию Крылова (непрерывные функции ограниченной вариации), является собственным подмножеством функционального класса, описываемого условиями (3) теоремы 2.

Если неубывающая, выпуклая вверх функция натурального аргумента v такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{v(k)}{k^2} < \infty,$$

то для любой функции $f \in C[a,b] \cap V^{\pm}(v)$ верно соотношение (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *А. А. Привалов* О равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа // Матем. заметки. 1986. Т. 39. № 2. С. 228–244.

2. *З. А. Чантурия* О равномерной сходимости рядов Фурье // Матем. сб. 1976. Т. 100(142), № 4(8). С. 534–554.