СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Михлин И. А.* Вариационные методы в математической физике. М. : Наука, 1970. 512 с.

2. *Трухляева И. В.* Оценка некоторой полиномиальной характеристики многомерной области // Дни геометрии в Новосибирске – 2015 : тез. Междунар. конф. Новосибирск : Ин-т матем. им. С. Л. Соболева СО РАН, 2015. С. 61–62.

УДК 517.977

СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ОБХОДА ЦЕЛЕЙ[1]

Е. А. Трушкова (Москва, РФ)
katerinatr@mail.ru

Среди всевозможных задач управления движением механических систем, летательных аппаратов (в частности, беспилотных), роботов-манипуляторов и т. д. есть широкий класс задач обхода заданных целей. Так, можно сформулировать задачу оптимального (по квадратичному критерию) обхода заданных пространственных целей в фиксированные моменты времени с одинаковыми скоростями прохода целей для линейной стационарной управляемой динамической системы вида

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_1 x(t) + A_2 v(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad t_0 < t_1, \\ \dot{v}(t) &= B_1 x(t) + B_2 v(t) + C u(t), \end{aligned} \tag{1}$$

Математически эта задача представляет собой задачу оптимального управления системой (1), где состояние динамической системы описывается вектором $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T \in W_2^1[t_0, t_1]$, скорость — вектором $v(t) = (v_1(t), \ldots, v_n(t))^T \in W_2^1[t_0, t_1]$, управление — вектором $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_q(t))^T \in L_2[t_0, t_1]$, с неразделенными многоточечными промежуточными условиями

$$\begin{gathered} x(t_0) = x_0, \quad x(\alpha_i) = x_i, \quad v(\alpha_{i-1}) = v(\alpha_i), \\ i \in \overline{1, m}, \quad t_0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{m-1} < \alpha_m = t_1. \end{gathered} \tag{2}$$

на минимум квадратичного критерия

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (u(t), u(t))\, dt \to \min. \tag{3}$$

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-07-00925а).

Кроме управляемости динамической системы (1) дополнительно предполагаем единственность решения задачи оптимального управления системой (1) на каждом отрезке времени $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$, $i = \overline{1,m}$, с фиксированными граничными условиями $x(\alpha_{i-1}) = x_{i-1}$, $x(\alpha_i) = x_i$, $v(\alpha_{i-1}) = v_{i-1}$, $v(\alpha_i) = v_i$ для любых $x_{i-1}, x_i, v_{i-1}, v_i \in \mathbb{R}^n$.

Множество $\mathbb{M}$ оптимальных траекторий $(x(t), v(t))$ задачи управления (1)–(3) должны удовлетворять соответствующим дифференциальным соотношениям принципа максимума Л.С. Понтрягина при $t \in$ $\in [t_0, \alpha_1) \cup (\alpha_1, \alpha_2) \ldots \cup (\alpha_{m-1}, t_1]$

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = A_1 x(t) + A_2 v(t),\, \dot{v}(t) = B_1 x(t) + B_2 v(t) + \tfrac{1}{2} C C^T \psi_2(t), \\ &\dot{\psi}_1(t) = -A_1^T \psi_1(t) - B_1^T \psi_2(t),\, \dot{\psi}_2(t) = -A_2^T \psi_1(t) - B_2^T \psi_2(t), \end{aligned} \tag{4}$$

и n–параметрическим (с параметром p) условиям

$$x(\alpha_i) = x_i, \quad v(\alpha_i) = p, \quad i \in \overline{0,m}. \tag{5}$$

Общее решение системы (4) имеет вид

$$\begin{aligned} &x(t) = \Phi_1(t) C_i, \quad v(t) = \Phi_2(t) C_i, \quad \psi_1(t) = \Phi_3(t) C_i, \\ &\psi_2(t) = \Phi_4(t) C_i, \quad t \in (\alpha_{i-1}, \alpha_i), \quad i = \overline{1,m}, \end{aligned}$$

где C_i — произвольные постоянные вектора размера $4n$, $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$, $\Phi_3(t)$, $\Phi_4(t)$ — первый, второй, третий и четвертый блоки из n строк фундаментальной матрицы $\Phi(t)$ системы (4). Тогда условия (5) можно переписать в виде

$$L(\alpha_{i-1}, \alpha_i) C_i = \begin{pmatrix} \Phi_1(\alpha_{i-1}) \\ \Phi_1(\alpha_i) \\ \Phi_2(\alpha_{i-1}) \\ \Phi_2(\alpha_i) \end{pmatrix} C_i = \begin{pmatrix} E_n & O_n \\ O_n & E_n \\ O_n & O_n \\ O_n & O_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i-1} \\ x_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O_n \\ O_n \\ E_n \\ E_n \end{pmatrix} p,$$

и выразить $C_i = D_i p + d_i$, где

$$D_i = L^{-1}(\alpha_{i-1}, \alpha_i) \begin{pmatrix} O_n \\ O_n \\ E_n \\ E_n \end{pmatrix}, d_i = L^{-1}(\alpha_{i-1}, \alpha_i) \begin{pmatrix} E_n & O_n \\ O_n & E_n \\ O_n & O_n \\ O_n & O_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i-1} \\ x_i \end{pmatrix}.$$

Здесь через E_n, O_n обозначены соответственно единичная и нулевая матрицы размера $n \times n$. Из вышеизложенного вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. *Множество оптимальных траекторий задачи оптимального обхода заданных пространственных целей x_i в фиксированные моменты времени α_i с одинаковыми скоростями прохода целей* (1)–(3) *имеет вид n–параметрического семейства*

$$\mathbb{M} = \left\{ \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} \exists p \in \mathbb{R}^2 : x(t) = \Phi_1(t)(D_i p + d_i), \\ v(t) = \Phi_2(t)(D_i p + d_i), \quad t \in [\alpha_{i-1}, \alpha_i],\, i = \overline{1,m} \end{array} \right\}.$$

В силу теоремы 1, опираясь на результаты работ [1–5], построены функции $u(t,x)$ и $\widetilde{u}(t,v)$, синтезирующие семейство $\mathbb{M}$. А именно, для каждого из полуинтервалов $t \in [\alpha_{i-1}, \alpha_i)$, $i = \overline{1,m}$, кроме конечного числа точек, в которых обращаются в нуль определители матриц $\Phi_1(t)D_i$ и $\Phi_2(t)D_i$ соответственно, справедливы формулы

$$u(t,x) = \frac{1}{2} C C^T \Phi_4(t) \left(D_i \left(\Phi_1(t) D_i\right)^{-1} \left(x - \Phi_1(t) d_i\right) + d_i \right),$$

$$\widetilde{u}(t,v) = \frac{1}{2} C C^T \Phi_4(t) \left(D_i \left(\Phi_2(t) D_i\right)^{-1} \left(v - \Phi_2(t) d_i\right) + d_i \right).$$

Таким образом, в линейно–квадратической задаче оптимального обхода заданных пространственных целей построено множество оптимальных траекторий и явные аналитические выражения для функций, синтезирующих оптимальные траектории, в виде управления с обратной связью как по состоянию $u(t,x)$, так и по скорости $\widetilde{u}(t,v)$ системы. Доказательства вышеперечисленных результатов опираются на результаты работ [1—5]. Как частные случаи с помощью описанной процедуры могут быть достаточно просто построены семейства оптимальных траекторий для задачи обхода фиксированных целей на плоскости или в пространстве при известной информации о состоянии системы или о скорости системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хромов А. П.* О синтезирующих функциях линейных дифференциальных систем с квадратичным критерием качества // Теория функций и приближений : тр. 4-й Сарат. зим. шк. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1990. Ч. 1. С. 106–112.

2. *Хромов А. П.* О задаче синтеза для линейных систем с квадратичным критерием качества // Дифференциальные уравнения и теория функций : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1991. Вып. 9. С. 3–14.

3. *Корнев В. В.* О существовании синтезирующих функций для линейно-квадратичных задач оптимального управления // Математика и ее приложения : межвуз. науч. сб. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1988. С. 44–45.

4. *Трушкова Е. А.* Синтез оптимальных траекторий, подчиненных граничным условиям, для линейных управляемых систем // АиТ. 2011. № 3. С. 3–14.

5. *Трушкова Е. А.* Синтез оптимальных траекторий для линейных систем с трехточечным смешанным условиям // Материалы XIX Межд. конф. по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2015). Алушта : Изд-во МАИ, 2015. С. 665–667.

УДК 517.518.85

О НЕКОТОРЫХ ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ СИНК-АППРОКСИМАЦИЙ[1]

А. Ю. Трынин (Саратов, РФ)
tayu@rambler.ru

В качестве инструмента приближения функций в теории кодирования сигналов Э. Борель и Э.Т. Уиттекер предложили рассматривать кардинальную функцию и усечённую кардинальную функцию, сужение на отрезок $[0, \pi]$ которых выглядит так:

$$L_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(nx - k\pi)}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

Обозначим $x_{k,n} = \frac{k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$. Для любых $0 \le a < b \le \pi$, $0 < \varepsilon < (b-a)/2$ положим

$$Q_n(f,[a,b],\varepsilon) := \max_{p_1 \le p \le p_2} \left| {\sum_{m=m_1}^{m_2}}' \frac{f(x_{2m+1,n}) - f(x_{2m,n})}{p - 2m} \right|.$$

Штрих у суммы означает отсутствие слагаемого со знаменателем равным нулю, а индексы p_1, p_2, m_1 и m_2 определяются неравенствами

$$x_{p_1,n} \le a + \varepsilon < x_{p_1+1,n}, \quad x_{p_2,n} \le b - \varepsilon < x_{p_2+1,n},$$

$$x_{k_1-1,n} < a \le x_{k_1,n}, \quad x_{k_2,n} \le b < x_{k_2+1,n},$$

$$m_1 = \left[\frac{k_1}{2}\right] + 1, \quad m_2 = \left[\frac{k_2}{2}\right].$$

Здесь $[z]$ обозначает целую часть числа z.

Теорема 1. *Если функция $f \in C[a,b]$, то из соотношения*

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(f,[a,b],\varepsilon) = 0 \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00102).