(3) Условие (2) выполнено только для некоторого p и для некоторой бесконечной последовательности натуральных номеров N.

Результат (3) $\Rightarrow$ (1) (для $p = 2$) был получен А. А. Владимировым в работе [1].

Более быстрая сходимость величины $\|f - f_N\|_{L_p}$ дает оценку для размерности Хаусдорфа носителя меры Лебега-Стилтьеса μ, порожденной функцией f. Будем говорить, что функция f приближается $\{f_N\}$ в L^p со скоростью $\alpha \geq 1$, если для бесконечного множества N выполнено

$$\|f - f_N\|_{L^p} \cdot N^{\alpha} \leq C\,, \quad \text{где } f_N \in \mathcal{D}_N\,.$$

Теорема 2. Пусть f приближается в L^p со скоростью α. Тогда у меры существует носитель, размерность Хаусдорфа которого не превосходит $1/(\alpha p + 1 - p)$.

Для самоподобных функций размерность носителя меры следует как частный случай из работы R. Strichartz [2], а скорость приближения вычислена в работе [3]. Используя это, можно построить примеры функций f, для которых указанная верхняя оценка на размерность Хаусдорфа будет точной; существуют и функции, для которых размерность меньше. Более того, нижнюю оценку на размерность получить невозможно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Владимиров А. А., Шейпак И. А.* О задаче Неймана для уравнения Штурма – Лиувилля с самоподобным весом канторовского типа // Функц. анализ и его прил. 2013. Т. 47, № 4. С. 18–29.

2. *Strichartz R.* Self-Similar Measures and their Fourier Transforms I // Indiana Univ. Math. J. 1990. Vol. 39, № 3. P. 797–817.

3. *Тихонов Ю. В.* О скорости приближения сингулярных функций кусочно-постоянными // Матем. заметки. 2014. Т. 95, вып. 4. С. 590–604.

УДК 517

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ КЛАССАМ БЕСОВА

Т. Е. Тилеубаев (Астана, Казахстан)

Tileubaev@mail.ru

Пусть $1 < p < \infty$. Через $L_{p,\alpha,\beta}[-1,1]$ обозначим пространство функций f таких, что функция $f(x)$ принадлежит пространству суммируемых функций на отрезке $[-1,1]$ с нормой

$$\|f\| = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^p (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Пусть $f\in L_{p,\alpha,\beta}$. Для $f\in L_{p,\alpha,\beta}$ введем модуль гладкости следующим образом:

$$\omega_k(f,\delta)_{p,\alpha,\beta}=\sup_{0\le h\le\delta}\|\triangle_h^k(f,.)\|_{p,\alpha,\beta}.$$

Через $E_n(f)_{p,\alpha,\beta}$ обозначим наилучшее приближение функции f в метрике пространства $L_{p,\alpha,\beta}$ алгебраическими многочленами степени не выше, чем $n-1$, т.е.

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta}=\inf_{P\subset P_n}\|f-P_n\|_{p,\alpha,\beta.}$$

Для θ, $p\in[1,+\infty)$ определим пространство

$$B(\theta,p,r)=\left\{f\in L_{p,\alpha,\beta}:\|f\|_{\theta,p,r}=\|f\|_{p,\alpha,\beta}+\left(\int\limits_0^1 t^{-\theta r-1}\omega_k^\theta(f,t)_{p,\alpha,\beta}\right)^{1/\theta}\right\},$$

где $k>r$.

Сформулируем известные результаты в виде лемм, которые мы будем использовать в дальнейшем при доказательстве теорем 1 и 2.

Лемма 1. *Пусть $1<q<\infty$, числа c_ν, d_ν таковы, что $c_\nu>0$, $d_\nu\ge 0$ при $\nu\in\mathbb{N}$. Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{\nu=0}^\infty c_\nu\left(\sum_{\mu=\nu}^\infty d_\mu\right)^q\le q^q\sum_{\nu=1}^\infty c_\nu^{1-q}\left(\sum_{\mu=1}^\nu\right)^q d_\mu^q.$$

Лемма 2. *Пусть $1<q<\infty$, числа c_ν, d_ν таковы, что $c_\nu>0$, $d_\nu\ge 0$ при $\nu\in\mathbb{N}$. Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{\nu=0}^\infty c_\nu\left(\sum_{\mu=1}^\nu d_\mu\right)^q\le q^q\sum_{\nu=1}^\infty c_\nu^{1-q}\left(\sum_{\mu=\nu}^\infty\right)^q d_\mu^q.$$

Лемма 3. *Пусть $0<q<1$, числа c_ν, d_ν таковы, что $c_\nu>0$, $d_\nu\ge 0$ при $\nu\in\mathbb{N}$. Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{\nu=0}^\infty c_\nu\left(\sum_{\mu=\nu}^\infty d_\mu\right)^q\ge q^q\sum_{\nu=1}^\infty c_\nu^{1-q}\left(\sum_{\mu=1}^\nu\right)^q d_\mu^q.$$

Лемма 4. *Пусть $0<q<1$, числа c_ν, d_ν таковы, что $c_\nu>0$, $d_\nu\ge 0$ при $\nu\in\mathbb{N}$. Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{\nu=0}^\infty c_\nu\left(\sum_{\mu=1}^\nu d_\mu\right)^q\ge q^q\sum_{\nu=1}^\infty c_\nu^{1-q}\left(\sum_{\mu=\nu}^\infty\right)^q d_\mu^q.$$

Доказательства лемм 1–4 содержатся в работе [2] (см. так же [3]).

Лемма 5. *Пусть $f \in L_{p,\alpha,\beta}$. Тогда*

а) при $2 \le p < \infty$ справедливо неравенство

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p,\alpha,\beta} \le C_1 \left\{ \frac{1}{n^{2k}} \left[\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^p \nu^{(2k+1)p-2} \right]^{1/p} + \left[\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu^p \nu^{p-2} \right]^{1/p} \right\},$$

б) при $1 < p \le 2$ справедливо неравенство

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{p}\right)_{p,\alpha,\beta} \ge C_2 \left\{ \frac{1}{n^{2k}} \left[\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^p \nu^{(2k+1)p-2} \right]^{1/p} + \left[\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu^p \nu^{p-2} \right]^{1/p} \right\}.$$

Лемма 6. *Пусть числа a, b и C_k таковы, что $0 < a < b < \infty$, $C_k > 0$. Тогда справедливо неравенство*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} C_k^b \right)^{1/b} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} C_k^a \right)^{1/a}.$$

Сформулируем достаточные условия принадлежности функции классу типа Бесова $B(\theta, p, r)$.

Теорема 1. 1. *Пусть $2 \le p < \infty$, $f \in L_{p,\alpha,\beta}$.*

а) если $\frac{\theta}{p} \ge 1$ и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^{\theta\left(r+1-\frac{1}{r}\right)-1} a_n^\theta$ сходится, то $f \in B$;

б) если $0 < \frac{\theta}{p} \le 1$ и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^{\theta\left(r+1-\frac{2}{r}\right)} a_n^\theta$ сходится, то $f \in B$.

2. *Пусть $1 < p < 2$, $f \in L_{p,\alpha,\beta}$ $\theta \ge 1$.*

в) если $\theta \geqslant 2$ и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^{\theta\left(r+\frac{1}{2}\right)-1} a_n^\theta$ сходится, то $f \in B$;

г) если $\theta \le 2$ и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^{\theta r} a_n^\theta$ сходится, то $f \in B$.

Теперь сформулируем необходимые условия принадлежности функции пространству Бесова $B(\theta, p, r)$.

Теорема 2. *Пусть $1 < p < \infty$, $f \in B$. Тогда*

а) при $1 < p \le 2$ и $\frac{\theta}{p} \ge 1$ сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^{\theta\left(r+1-\frac{2}{r}\right)-1} a_n^\theta$;

б) при $1 < p \le 2$ и $0 < \frac{\theta}{p} \le 1$ сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^{\theta\left(r+1-\frac{1}{r}\right)} a_n^\theta$.

в) при $p \ge 2$ и $\theta \ge 2$ сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^{\theta r} a_n^\theta$.

г) при $0 < \theta \le 2$ и $p \ge 2$ сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^{\theta\left(r+\frac{1}{2}\right)} a_n^\theta$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Федоров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений : дисс. канд. физ.-мат. наук. М., МГУ, 1983. 127 с.

2. *Потапов М. К., Бериша М.* Модули гладкости и коэффициенты Фурье периодических функций одного переменного // Publications De L‘institut mathemaique. 1979. Nouvelle serie. T. 26 (40). P. 215–228.

3. *Leindler L.* Uber verschiedene Konvergenzarten trigonomtricher Reihen, III // Acta. Scient. Math. 1966. Vol. 27, № 3–4. P. 205–215.

УДК 517.5

О РАЗНОСТНОМ УРАВНЕНИИ ЛАПЛАСА С ЧЕТЫРЕМЯ УЗЛАМИ

Д. С. Теляковский (Москва, РФ)

dtelyakov@mail.ru

Ослабляются достаточные условия гармоничности функций $u(z) = u(x,y)$, $z \in G$, двух действительных переменных.

Определим расположение узлов разностного уравнения Лапласа. Пусть точки z_1, z_2 и z_3 являются вершинами остроугольного треугольника $\triangle = \triangle_{z_1z_2z_3}$, а точка z_0 — точкой пересечения высот этого треугольника. Поскольку треугольник остроугольный, точка z_0 лежит внутри $\triangle$ и углы между каждыми двумя лучами из набора z_0z_1, z_0z_2 и z_1z_3 больше $\pi/2$. Для определённости будем считать, что вершины z_1, z_2 и z_3 занумерованы в порядке обхода $\triangle$ в положительном направлении. Такой набор точек $\{z_1, z_2, z_3\}$ будем называть подходящим (для уравнения Лапласа) набором узлов для точки z_0. Пусть $z_j - z_0 = r_je^{i\varphi_j}$, $j = 1, 2, 3$ и $u_j = u(z_j)$, $j = 0, 1, 2, 3$.

Рассматривается следующее разностное выражение для уравнения Лапласа в точке z_0 для набора узлов $\{z_1, z_2, z_3\}$:

$$\Delta^*u(z_0) = \Delta^*u(z_0, z_1, z_2, z_3) :=$$
$$:= \frac{u_1 - u_0}{r_1^2}\sin 2(\varphi_2 - \varphi_3) + \frac{u_2 - u_0}{r_2^2}\sin 2(\varphi_3 - \varphi_1) + \frac{u_3 - u_0}{r_3^2}\sin 2(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Будем говорить, что функция $u(z)$ удовлетворяет в точке z_0 обобщённому разностному уравнению Лапласа, если в любой окрестности точки z_0 найдётся подходящий набор узлов $\{z_1, z_2, z_3\}$ для которого величина $\Delta^*u(z_0, z_1, z_2, z_3)$ сколь угодно мала по модулю.

Теорема. *Пусть функция $u(z)$ удовлетворяет в области G следующим условиям:*

1) *в каждой точке области выполнено обобщённое разностное уравнение Лапласа*;