3. *DeVore R. A., Lorentz G. G.* Constructive Approximation. Berlin: Springer-Verlag, 1993. x+450 p.

4. *Новиков И. Я.* Асимптотика корней полиномов Бернштейна, используемых в построении модифицированных всплесков Добеши // Матем. заметки. 2002. Т. 71, вып. 2. С. 239–253.

5. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 15, № 26. С. 6–40.

6. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Полиномы Бернштейна: старое и новое // Матем. форум. Т. 8, ч. 1. Исследования по матем. анализу. Владикавказ : ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014. С. 126–175.

7. *Jentzsch R.* Untersuchungen zur Theorie der Folgen analytischer Funktionen // Acta Math. 1916. Vol. 41. P. 219–251.

8. *Izumi S.* On the Distribution of the Zero Points of Sections of a Power Series // Japanese J. Math. 1927. Vol. 4. P. 29–32.

УДК 517.518

СКОРОСТЬ ПРИБЛИЖЕНИЯ МОНОТОННОЙ ФУНКЦИИ КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ КАК КРИТЕРИЙ ЕЁ СИНГУЛЯРНОСТИ [1]

Ю. В. Тихонов (Москва, РФ)

july.tikh@gmail.com

Рассмотрим ограниченную неубывающую функцию $f\colon [0;1] \to \mathbb{R}$. Будем приближать её в $L^p[0;1]$ кусочно постоянными функциями f_N, у которых соответственно не более N различных значений. Тогда асимптотическое поведение величины $\|f - f_N\|_{L^p}$ будет некоторым образом характеризовать степень сингулярности функции f.

Пусть $\mathcal{D}_N$ — множество кусочно-постоянных функций на $[0;1]$, принимающих не более N различных значений. Тогда существует функция $f_N \in \mathcal{D}_N$, ближайшая к f в метрике $L^p[0;1]$.

Легко проверить, что для произвольной неубывающей ограниченной функции f величина $\|f - f_N\|_{L^p} \cdot N$ ограничена при всех натуральных N. Оказывается, что для сингулярных функций и только для них эта величина стремится к нулю при $N \to \infty$.

Теорема 1. Пусть f — ограниченная неубывающая функция на $[0;1]$. Следующие условия эквивалентны:

(1) f — сингулярна, то есть её производная равна нулю почти всюду.

(2) Для любого $p \in [1;+\infty)$

$$\|f - f_N\|_{L^p} \cdot N \to 0\,, \quad N \to \infty,$$

где $f_N \in \mathcal{D}_N$, $\|f - f_N\|_{L^p} \to \min$.

[1] Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 14-11-00754).

(3) Условие (2) выполнено только для некоторого p и для некоторой бесконечной последовательности натуральных номеров N.

Результат (3) $\Rightarrow$ (1) (для $p = 2$) был получен А. А. Владимировым в работе [1].

Более быстрая сходимость величины $\|f - f_N\|_{L_p}$ дает оценку для размерности Хаусдорфа носителя меры Лебега-Стилтьеса μ, порожденной функцией f. Будем говорить, что функция f приближается $\{f_N\}$ в L^p со скоростью $\alpha \geq 1$, если для бесконечного множества N выполнено

$$\|f - f_N\|_{L^p} \cdot N^{\alpha} \leq C\,, \quad \text{где } f_N \in \mathcal{D}_N\,.$$

Теорема 2. Пусть f приближается в L^p со скоростью α. Тогда у меры существует носитель, размерность Хаусдорфа которого не превосходит $1/(\alpha p + 1 - p)$.

Для самоподобных функций размерность носителя меры следует как частный случай из работы R. Strichartz [2], а скорость приближения вычислена в работе [3]. Используя это, можно построить примеры функций f, для которых указанная верхняя оценка на размерность Хаусдорфа будет точной; существуют и функции, для которых размерность меньше. Более того, нижнюю оценку на размерность получить невозможно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Владимиров А. А., Шейпак И. А.* О задаче Неймана для уравнения Штурма – Лиувилля с самоподобным весом канторовского типа // Функц. анализ и его прил. 2013. Т. 47, № 4. С. 18–29.

2. *Strichartz R.* Self-Similar Measures and their Fourier Transforms I // Indiana Univ. Math. J. 1990. Vol. 39, № 3. P. 797–817.

3. *Тихонов Ю. В.* О скорости приближения сингулярных функций кусочно-постоянными // Матем. заметки. 2014. Т. 95, вып. 4. С. 590–604.

УДК 517

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ КЛАССАМ БЕСОВА

Т. Е. Тилеубаев (Астана, Казахстан)

Tileubaev@mail.ru

Пусть $1 < p < \infty$. Через $L_{p,\alpha,\beta}[-1,1]$ обозначим пространство функций f таких, что функция $f(x)$ принадлежит пространству суммируемых функций на отрезке $[-1,1]$ с нормой

$$\|f\| = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^p (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} dx \right)^{1/p} < \infty.$$