$\varphi(t) \equiv 1$ в уравнении (1) и $\mu(t) \equiv t$ в условии (11), подтвердили математическую актуальность такой тематики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. N. Y.; Basel : Marcel Dekker, 2000. 744 p.

2. *Эйдельман Ю. С.* Единственность решения обратной задачи для дифференциального уравнения в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 9. С. 1647–1649.

3. *Орловский Д. Г.* К задаче определения параметра эволюционного уравнения // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 9. С. 1614–1621.

4. *Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С.* Единственность решения двухточечной обратной задачи для абстрактного дифференциального уравнения с неизвестным параметром // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 8. С. 1132–1133.

5. *Тихонов И. В.* Соображения монотонности в обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения // Интегральные преобразования и специальные функции. Информ. бюллетень. 2001. Т. 2, № 1. С. 119–128.

6. *Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С.* Критерий единственности в обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения с нестационарным неоднородным слагаемым // Матем. заметки. 2005. Т. 77, вып. 2. С. 273–290.

7. *Любич Ю. И.* О собственных и присоединенных функциях оператора дифференцирования // Известия вузов. Матем. 1959. № 4. С. 94–103.

8. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956. 632 с.

УДК 517.518.82

ЗАДАЧА О НУЛЯХ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА НА МОДЕЛЬНОМ ПРИМЕРЕ СИММЕТРИЧНОГО МОДУЛЯ

И. В. Тихонов, В. Б. Шерстюков, Д. Г. Цветкович
(Москва, РФ)

ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com, dianacve@inbox.ru

Полиномы Бернштейна являются важным инструментом классического анализа (см. [1–3]). Недавно замечено [4], что в некоторых типичных ситуациях нули полиномов Бернштейна образуют регулярные структуры на комплексной плоскости. Дадим сейчас качественное описание распределения нулей полиномов Бернштейна в модельном примере симметричного модуля.

Пусть

$$f(x) = |2x - 1|, \qquad x \in [0, 1]. \tag{1}$$

Для функции (1) введем полиномы Бернштейна переменной $z \in \mathbb{C}$ по формуле

$$B_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{2k}{n} - 1 \right| C_n^k \, z^k (1 - z)^{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Основные соотношения, связанные с полиномами (2), обсуждаются в [5, 6]. Первый полином $B_1(z) \equiv 1$ является исключительным. Остальные полиномы (2) подчинены *правилу склеивания*

$$B_{2m+1}(z) = B_{2m}(z), \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

В силу (3) отберем полиномы (2) только с четными номерами

$$B_{2m}(z) = \sum_{k=0}^{2m} \left| \frac{k}{m} - 1 \right| C_{2m}^k \, z^k (1-z)^{2m-k}, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Важную роль играет следующее *разложение Поповичу* (см. [5, 6])

$$B_{2m}(z) = 1 \, - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k-1} \, C_{2k}^k \, (z(1-z))^k, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Дифференцируя (5), получаем

$$B'_{2m}(z) = 2(2z-1) \sum_{k=0}^{m-1} C_{2k}^k \, (z(1-z))^k, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Сравнение (5) и (6) дает соотношение

$$(2z-1) B'_{2m}(z) = 2\big(\, B_{2m}(z) - C_{2m}^m (z(1-z))^m \, \big), \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Особенно простым будет выражение для второй производной:

$$B''_{2m}(z) = 2m C_{2m}^m \, (z(1-z))^{m-1}, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Полиномы (8) образуют элементарную δ-образную последовательность, сходящуюся на [0, 1] к $4\delta(z - 1/2)$ (см. [5]).

При исследовании аналитических вопросов, связанных с полиномами (4), полезен переход от разложения (5) к эквивалентному представлению

$$B_{2m}(z) = 1 \, - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k-1} \, 2^{-2k} C_{2k}^k \, (4z(1-z))^k, \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

с последующей заменой

$$\zeta = q(z) \equiv 4z(1-z), \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{10}$$

Возникающие полиномы переменной $\zeta \in \mathbb{C}$ совпадают с частичными суммами степенного разложения

$$\sqrt{1-\zeta} \,=\, 1 \,-\, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}\, 2^{-2k} C_{2k}^{k}\, \zeta^{k}. \tag{11}$$

Ряд (11) сходится в круге $|\zeta| \leqslant 1$.

Основываясь на отмеченных соотношениях (5)–(11), можно провести полное исследование сходимости полиномов Бернштейна (4) в комплексной плоскости и показать, что их нули концентрируются вблизи границы области сходимости.

Перечислим основные результаты.

1. Для последовательности полиномов (4) множество сходимости совпадает с компактом, ограниченным лемнискатой

$$|4z(1-z)| = 1, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{12}$$

Сходимость полиномов равномерная: в левой петле — к функции $f_1(z) = 1-2z$, в правой петле — к функции $f_2(z) = 2z-1$.

2. Все нули полиномов (4) являются простыми и находятся строго вне лемнискаты (12), т. е. не попадают ни внутрь лемнискаты, ни на саму кривую.

3. «Почти все» нули полиномов (4) являются комплексными. Точнее, при $j \in \mathbb{N}$ полиномы $B_{4j}(z)$ имеют ровно два вещественных нуля. Остальные полиномы (4) вовсе не имеют вещественных нулей.

4. Для любой малой внешней окрестности лемнискаты (12) в эту окрестность попадают все нули полиномов (4), начиная с некоторого достаточно большого номера $n = 2m$. Каждая точка лемнискаты (12) является предельной для некоторой последовательности нулей. Проще говоря, нули полиномов (4) постепенно сближаются с лемнискатой (12), заполняя «в пределе» всю лемнискату.

Аналогичные результаты, с соответствующими техническими поправками, устанавливаются для производных от полиномов (4), т. е. для полиномов (6).

1. Последовательность полиномов (6) сходится (поточечно) на компакте, ограниченном лемнискатой (12); в точке $z = 1/2$ — к нулю, в остальных точках левой петли — к функции $\varphi_1(z) \equiv -2$, а в остальных точках правой петли — к функции $\varphi_2(z) \equiv 2$. Эта сходимость будет равномерной на пересечении указанного компакта с множеством $|z-1/2| \geqslant \varepsilon$ при любом малом $\varepsilon > 0$.

2. Точка $z = 1/2$ на лемнискате (12) является простым нулем для любого из полиномов (6). Все другие нули полиномов (6) тоже являются простыми, но находятся строго вне лемнискаты (12).

3. «Почти все» нули полиномов (6) являются комплексными. Точнее, при $j \in \mathbb{N}$ полиномы $B'_{4j}(z)$ имеют ровно три вещественных нуля, включая $z = 1/2$. Остальные полиномы (6) имеют единственный вещественный нуль $z = 1/2$.

4. При увеличении номера $n = 2m$ нули полиномов (6) постепенно сближаются с лемнискатой (12), заполняя «в пределе» всю лемнискату.

Современные системы компьютерной математики позволяют проводить весьма точные расчеты, дающие наглядное представление о перечисленных закономерностях. Среди прочего вычислительные эксперименты показывают, что нули полиномов (4), стягиваясь к лемнискате (12), быстро уплотняются на некотором удалении от точки $z = 1/2$. Рядом же с указанной точкой нули появляются лишь при больших номерах и имеют малую плотность. Схожая картина наблюдается для нулей полиномов (6).

Теоретическая часть нашего исследования использует известные результаты о нулях частичных сумм степенного ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \, \zeta^k \tag{13}$$

с коэффициентами $a_k \in \mathbb{C}$. Считаем, что радиус сходимости ряда (13) равен единице, т. е. ряд заведомо сходится в круге $|\zeta| < 1$ и расходится при $|\zeta| > 1$. Тогда справедливы два утверждения [7, 8].

Теорема (Jentzsch, 1916). *Каждая точка границы круга сходимости степенного ряда* (13) *является предельной для множества нулей, взятых от всех частичных сумм этого ряда.*

Теорема (Izumi, 1927). *Если коэффициенты ряда* (13) *удовлетворяют условию*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k-1}}{a_k} = 1,$$

то для любого $\varepsilon > 0$ *множество* $|\zeta| > 1 + \varepsilon$ *содержит не более, чем конечное число нулей от частичных сумм ряда* (13).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lorentz G. G.* Bernstein Polynomials. Toronto: Univ. of Toronto Press, 1953. x+130 p.

2. *Виденский В. С.* Многочлены Бернштейна. Л.: ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1990. 64 с.

3. *DeVore R. A., Lorentz G. G.* Constructive Approximation. Berlin: Springer-Verlag, 1993. x+450 p.

4. *Новиков И. Я.* Асимптотика корней полиномов Бернштейна, используемых в построении модифицированных всплесков Добеши // Матем. заметки. 2002. Т. 71, вып. 2. С. 239–253.

5. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 15, № 26. С. 6–40.

6. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Полиномы Бернштейна: старое и новое // Матем. форум. Т. 8, ч. 1. Исследования по матем. анализу. Владикавказ : ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014. С. 126–175.

7. *Jentzsch R.* Untersuchungen zur Theorie der Folgen analytischer Funktionen // Acta Math. 1916. Vol. 41. P. 219–251.

8. *Izumi S.* On the Distribution of the Zero Points of Sections of a Power Series // Japanese J. Math. 1927. Vol. 4. P. 29–32.

УДК 517.518

СКОРОСТЬ ПРИБЛИЖЕНИЯ МОНОТОННОЙ ФУНКЦИИ КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ КАК КРИТЕРИЙ ЕЁ СИНГУЛЯРНОСТИ [1]

Ю. В. Тихонов (Москва, РФ)
july.tikh@gmail.com

Рассмотрим ограниченную неубывающую функцию $f\colon [0;1] \to \mathbb{R}$. Будем приближать её в $L^p[0;1]$ кусочно постоянными функциями f_N, у которых соответственно не более N различных значений. Тогда асимптотическое поведение величины $\|f - f_N\|_{L^p}$ будет некоторым образом характеризовать степень сингулярности функции f.

Пусть $\mathcal{D}_N$ — множество кусочно-постоянных функций на $[0;1]$, принимающих не более N различных значений. Тогда существует функция $f_N \in \mathcal{D}_N$, ближайшая к f в метрике $L^p[0;1]$.

Легко проверить, что для произвольной неубывающей ограниченной функции f величина $\|f-f_N\|_{L^p}\cdot N$ ограничена при всех натуральных N. Оказывается, что для сингулярных функций и только для них эта величина стремится к нулю при $N \to \infty$.

Теорема 1. Пусть f — ограниченная неубывающая функция на $[0;1]$. Следующие условия эквивалентны:

(1) f — сингулярна, то есть её производная равна нулю почти всюду.

(2) Для любого $p \in [1;+\infty)$

$$\|f - f_N\|_{L^p} \cdot N \to 0\,, \quad N \to \infty,$$

где $f_N \in \mathcal{D}_N$, $\|f - f_N\|_{L^p} \to \min$.

[1] Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 14-11-00754).