

АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА (АКЧ) 1. ИЗОБРАЖЕНИЕ НА ПЛОСКОСТИ. СВОЙСТВА МОДУЛЕЙ

В. Д. Александров

Донбасская национальная академия строительства и архитектуры
avd-crystal@mail.ru

Предложен альтернативный вариант геометрической интерпретации комплексных чисел $R = a + bi$, модуль которых $[R] = a + b$ непосредственно равен сумме чисел a, b с аргументом $\psi = \text{Arg tg } \sqrt{\frac{b}{a}}$.

Классические комплексные числа, альтернативные комплексные числа, модуль, аргумент, геометрическая интерпретация, свойства модулей.

Как известно [1] комплексные числа $Z = x + yi$ (назовем их классическими комплексными числами — ККЧ) изображаются в виде вектора \vec{r} , модуль которого $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, а аргумент $\phi = \text{Arg tg } \frac{y}{x}$.

Альтернативным комплексным числом АКЧ [2] называется выражение $R = a + bi$, где a и b — любые действительные числа, а $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица. В векторной форме $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b}i$.

Альтернативное комплексное число $R = a + bi$ изображается в плоскости отрезком прямой OM с проекциями x и Y на соответствующие оси, либо вектором $\vec{R} = \vec{OM}$ под углом ψ относительно оси x (рис. 1).

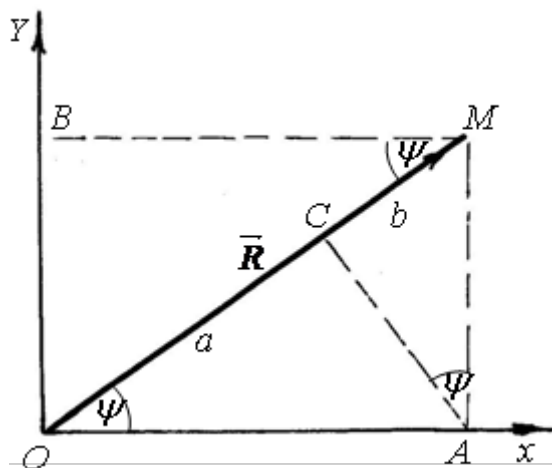


Рис. 1

Длина отрезка OM называется *модулем АКЧ* $[R]$, равным сумме длин a и b

$$[R] = |a + b|.$$

Отрезок $|OC| = a$ связан с действительной осью x $a = c \cos \psi$ (из ΔOCA), а отрезок $|CM| = b$ связан с мнимой осью Y (yi) $b = y \sin \psi$ (из ΔCMA).

Модуль альтернативного комплексного числа выражен через квадратные скобки []. Такое обозначение отнесено лишь к мнимой части комплексного числа (считая $i = \sqrt{-1}$ знаком), наподобие модуля вещественных чисел, отнесенного лишь для числа -1 , т.е. $|\pm a| = a$, $|\pm b| = b$.

Вещественный модуль от модуля мнимого числа

$$|[\pm ai]| = |\pm a| = a, \quad |[\pm bi]| = |\pm b| = b.$$

Тогда вещественный модуль комплексных чисел $R = a \pm bi$ будет иметь вид

$$|[R]| = |[a] + [bi]| = |a + b| = a + b, \quad |[R]| = |[a] + [-bi]| = |a - b| = a - b.$$

Очевидно, что для $R = a + bi$ $[R] = a + b$, а для $R = a - bi$ $[R] = a - b$.

Угол ψ , образованный вектором \overrightarrow{OM} с осью Ox , называется *аргументом АКЧ* и обозначается $\psi = \text{Arg} [R]$; он определяется неоднозначно, а с точностью до слагаемого, кратного 2π :

$$\text{Arg} R = \arg R + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

где $\arg R$ есть главное значение $\text{Arg} R$, определяемое условиями

$$-\pi < \arg R \leq \pi.$$

Угол ψ связан с числами a и b следующим образом:

$$\frac{y \sin \psi}{x \cos \psi} = \frac{b}{a}.$$

Так как $\frac{y}{x} = \text{tg} \psi$, то получаем $\text{tg} \psi = \sqrt{\frac{b}{a}}$, $\psi = \text{arctg} \sqrt{\frac{b}{a}}$,

$$\cos \psi = \sqrt{\frac{a}{[R]}} = \sqrt{\frac{a}{a+b}}, \quad \psi = \arccos \sqrt{\frac{a}{a+b}},$$

$$\sin \psi = \sqrt{\frac{b}{[R]}} = \sqrt{\frac{b}{a+b}}, \quad \psi = \arcsin \sqrt{\frac{b}{a+b}}.$$

Откуда числа a и b можно выразить через аргумент:

$$a = [R] \cos^2 \psi, \quad b = [R] \sin^2 \psi.$$

Проанализируем динамику изменения параметров АКЧ при вращении вектора \vec{R} . Приняв длину вектора \vec{R} за неизменную величину и вращая его против часовой стрелки, получим круг, который можно разделить на четыре квадранта и восемь секторов (рис. 2).

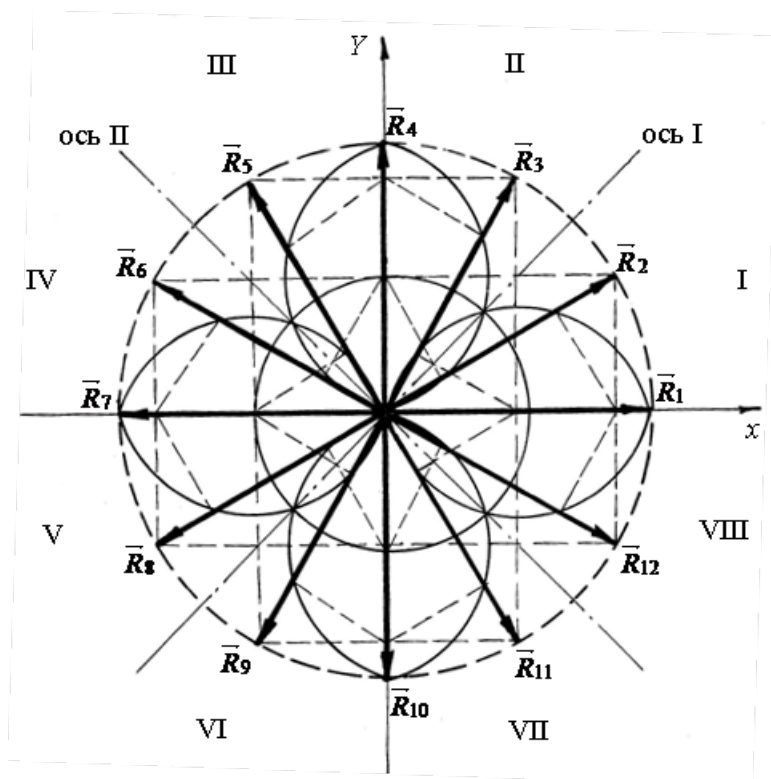


Рис. 2

Расположение векторов \vec{R} в том или ином секторе зависит от соотношения чисел a и b . Например, для вектора \vec{R}_2 $a > b$, следовательно, он расположен в первом секторе, а при $a < b$ вектор \vec{R}_3 находится во втором секторе и т.д. (рис. 2).

Если построить в каждом квадранте прямоугольники в виде, показанном на рис. 1 с перпендикулярами на соответствующие векторы \vec{R} при условии $[R] = |a| + |b|$, получим схему, показанную на рис. 2. В результате вращения вектора \vec{R} векторы \vec{a} и \vec{b} непрерывно меняются так, что общая их сумма по модулю остается постоянной. При $[R] = |a + b|$ и $|a| = |b|$ вектор \vec{R} длиной $a + b$ находится на оси симметрии I под углом 45° . При $[R] = |a - b|$ и $|a| = |b|$ имеем точку $[R] = 0$ на середине отрезка $[R]$ на оси симметрии II. При вращении вектора $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b}i$ в первом квадранте против часовой стрелки $|\vec{a}|$ уменьшается, а $|\vec{b}|$ увеличивается. Во втором квадранте наоборот, величина $|\vec{a}|$ увеличивается, а величина $|\vec{b}|$ уменьшается. В каждом квадранте концы векторов \vec{a} и \vec{b} описывают соответствующие дуги относительно осей x и Y . При дальнейшем вращении вектора \vec{R} подобные изменения с векторами \vec{a} и \vec{b} будут носить циклический характер.

Пользуясь правилами геометрической интерпретации АКЧ, перечисленными в начале статьи, можно показать, что уравнения кривых, описываемых концами векторов \vec{a} и \vec{b} соответственно, имеют вид

$$y = \sqrt{R^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}} - x^2}, \quad (1)$$

$$x = \sqrt{R^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}} - y^2}. \quad (2)$$

Методом компьютерной графики по формулам (1) и (2) при $R = 5$ см построены фигуры, образуемые вращением векторов \vec{a} и \vec{b} . Вектор \vec{a} описывает «восьмерки» вдоль оси x , а вектор \vec{b} — вдоль оси Y (рис. 3).

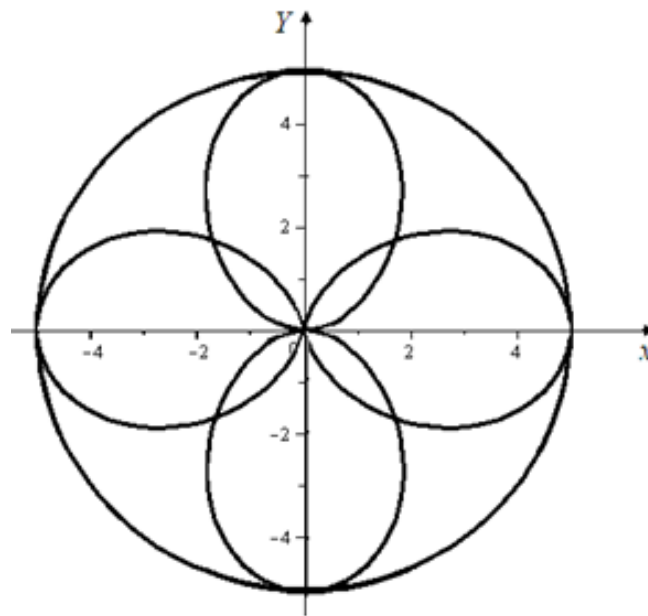


Рис. 3

Анализируя вид «восьмерок» на рис. 3, находим их сходство с лемнискатой Бернулли с осями симметрии Y , x и узлообразной повязкой (лемниском) в точке O . Изменение же положения конца вектора \vec{R} определяется уравнением окружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.

На основании многочисленных примеров показано, что использование свойств АКЧ при их решении, приводят к результатам, отличным от результатов, получаемых в версии ККЧ.

Тема, затронутая в данном сообщении, имеет свое продолжение в виде статей, готовых к опубликованию:

- «Свойства альтернативных комплексных чисел»,
- «Выражение альтернативных комплексных чисел через гиперболические функции»,
- «Изображение альтернативных комплексных чисел в пространстве»,

— «Использование свойств альтернативных комплексных чисел при решении задач механики, оптики и кристаллографии».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Привалов И. И. Введение в теорию комплексного переменного. М. : Наука, 1977. 444 с.
2. Александров В. Д. Альтернативные комплексные числа и действия над ними. Донецк : Донбасс, 2012. 239 с.

УДК 517.984

МОНОТОННО ЛИНЕЙНО СВЯЗНОЕ МНОЖЕСТВО С РАДИАЛЬНО НЕПРЕРЫВНОЙ СНИЗУ МЕТРИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИЕЙ ЯВЛЯЕТСЯ СТРОГИМ СОЛНЦЕМ¹

А. Р. Алимов (Москва, РФ)

alexey.alimov-msu@yandex.ru

Всюду ниже X — действительное линейное нормированное пространство, $B(x, r)$ — замкнутый шар с центром x и радиуса r , $\mathring{B}(x, r)$ — открытый шар.

Ниже мы следуем определениям, данным в обзоре [1].

Пусть $k(\tau)$, $0 \leq \tau \leq 1$, — непрерывная кривая в линейном нормированном пространстве X . Кривая $k(\cdot)$ *монотонная*, если $f(k(\tau))$ является монотонной функцией по τ для любого $f \in \text{ext } S^*$ (где $\text{ext } S^*$ — множество крайних точек единичной сферы S^* сопряженного пространства).

Замкнутое подмножество $M \subset X$ называется *монотонно линейно связным*, если любые две точки из M можно соединить непрерывной монотонной кривой (дугой) $k(\cdot) \subset M$. Монотонно линейно связное множество всегда экстремально монотонно линейно связно (т.е. его пересечение с любым пересечением гиперполос, порождаемых экстремальными функционалами единичной сферы сопряженного пространства) монотонно линейно связно. Частным случаем бруса является замкнутый шар.

Пусть $\emptyset \neq M \subset X$, $x_0 \in X$, P_M — оператор метрической проекции на M . Метрическая проекция P_M *внешне радиально непрерывна снизу* (*ORL-непрерывна*) в точке x_0 если для любого $v_0 \in P_M x_0$ и любого открытого ореп множества W такого, что $P_M x_0 \cap W \neq \emptyset$, существует окрестность U точки x_0 такая, что $P_M x \cap W \neq \emptyset$ для каждого $x \in U \cap \{v_0 + \lambda(x_0 - v_0) \mid \lambda \geq 1\}$ (см. [2]). Метрическая проекция P_M *ORL-непрерывна*, если оператор P_M *ORL-непрерывен* в каждой точке

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00295).