здесь $c(a)$ — положительная константа, χ — наименьшая из констант в интегральном неравенстве Маркова для оценки производной алгебраического многочлена:

$$\int_{-1}^{1} |q'_m(t)|dt \leq \chi m^2 \int_{-1}^{1} |q_m(t)|dt.$$

Используя указанную весовую оценку, в настоящей работе доказана следующая

Теорема. *Существует такое достаточно малое фиксированное число a, что при $2 \leq n \leq a\lambda_N^{-1/3}$ имеет место оценка*

$$L_{n,N}(t) \leq c(a)C_{n,N}\left[\ln n + \left(\sqrt{1-t^2}+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}\right], \quad t \in [-1,1],$$

где

$$C_{n,N} = \sqrt{\frac{\hat{k}_{n,N}\hat{P}_{n+1,N}(1)}{\hat{k}_{n+1,N}\hat{P}_{n,N}(1)}}.$$

Следствие. *Для каждой последовательности $A = (a_2, a_3, \ldots)$, такой что $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$, и каждого $2 \leq n \leq a_N\lambda_N^{-1/3}$ имеет место оценка*

$$L_{n,N}(t) \leq c_N(A)\left[\ln n + \left(\sqrt{1-t^2}+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}\right], \quad t \in [-1,1].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Султанахмедов М.С.* Асимптотические свойства и весовые оценки полиномов, ортогональных на неравномерной сетке с весом Якоби // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 1. С. 38–46.

УДК 517.9

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

И. В. Тихонов (Москва, РФ)

ivtikh@mail.ru

Дадим краткий обзор к одному из направлений теории обратных задач, понимаемых в смысле [1]. Речь идет о восстановлении неточно заданного неоднородного слагаемого в линейном эволюционном уравнении.

Исследование удобно проводить на языке абстрактных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Полученные результаты можно применять затем к разным ситуациям, важным для математической физики.

Пусть A — линейный замкнутый оператор в комплексном банаховом пространстве E. Область определения $D(A) \subset E$ не обязательно плотна в E. Зафиксируем отрезок $[0,T] \subset \mathbb{R}$ и функцию $\varphi \in C([0,T])$, такую, что $\varphi(t) \not\equiv 0$ на $[0,T]$. Рассмотрим уравнение

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + \varphi(t)g, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$

с неизвестной функцией $u \in C^1([0,T],E)$ и неизвестным элементом $g \in E$. Предполагаем также, что $u(t) \in D(A)$ при всех $t \in [0,T]$. Для одновременного нахождения пары $(u(t),g)$ возьмем условия

$$u(0) = u_0, \qquad u(T) = u_1, \tag{2}$$

с заданными элементами $u_0, u_1 \in D(A)$. Другими словами, к стандартному *условию Коши* добавим еще *финальное переопределение*. Возникает вопрос: обеспечивают ли условия (2) однозначность восстановления неизвестной пары $(u(t),g)$ в уравнении (1)?

Так как нас интересует единственность решения, то достаточно разобрать случай однородных условий

$$u(0) = 0, \qquad u(T) = 0. \tag{3}$$

Ясно, что задача $(1),(3)$ всегда имеет тривиальное решение $u(t) \equiv 0$, $g = 0$. Спрашивается, бывают ли другие, нетривиальные решения? Как можно гарантировать их отсутствие? Оказывается, поставленные вопросы допускают «почти исчерпывающий» ответ, выраженный в чисто спектральных терминах.

Первоначально исследование подобных задач проводилось в предположении корректности задачи Коши для уравнения (1). Например, типичным было требование, чтобы оператор A порождал полугруппу класса C_0 (см. [1–3]). Затем, однако, выяснилось, что концептуальные ограничения на оператор A не имеют особого значения. Определяющим является «взаимодействие» оператора d/dt с функцией $\varphi(t)$ и краевыми условиями (3).

Так, при анализе соотношений $(1),(3)$ методом разделения переменных естественно возникает скалярная *операционная модель*

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) + \varphi(t), & 0 \leqslant t \leqslant T, \\ y(0) = 0, \quad y(T) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

со спектральным параметром $\lambda \in \mathbb{C}$. Собственные значения модельной задачи (4) совпадают с нулями целой функции

$$L(\lambda) = \int_0^T e^{\lambda(T-s)} \varphi(s)\, ds, \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

Будем называть функцию (5) *характеристической функцией* обратной задачи (1), (3). Поскольку $\varphi(t) \not\equiv 0$, то функция (5) имеет счетное множество различных нулей. Непосредственно проверяется такой результат.

Теорема 1. *Пусть некоторый нуль $\lambda_k \in \mathbb{C}$ характеристической функции* (5) *является собственным значением оператора A с собственным вектором f_k, т. е.*

$$Af_k = \lambda_k f_k, \qquad f_k \in D(A), \qquad f_k \neq 0. \tag{6}$$

Тогда пара

$$u(t) = \int_0^t e^{\lambda_k(t-s)} \varphi(s) f_k\, ds, \qquad g = f_k \tag{7}$$

дает нетривиальное решение однородной обратной задачи (1), (3).

Теорема 1 указывает необходимое условие единственности решения в обратной задаче (1), (3): *ни один нуль характеристической функции* (5) *не должен совпадать с собственным значением оператора A.* Весьма неожиданно, что в самых естественных ситуациях это простое *необходимое* условие единственности оказывается также *достаточным.* Некоторые тонкости связаны с функцией $\varphi(t)$.

Самый простой случай, когда $\varphi(t) \equiv 1$ на $[0, T]$. Характеристическая функция (5) принимает вид

$$L(\lambda) = \frac{e^{\lambda T} - 1}{\lambda}, \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \qquad L(0) = T. \tag{8}$$

Нули для (8) вычисляются явно:

$$\lambda_k = \frac{2k\pi i}{T}, \qquad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \qquad i^2 = -1. \tag{9}$$

В работе [4] установлен следующий базовый результат.

Теорема 2. *Допустим, что ни одно число λ_k из формулы* (9) *не является собственным значением оператора A. Тогда однородная обратная задача* (1), (3) *с функцией $\varphi(t) \equiv 1$ имеет на $[0, T]$ только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$, $g = 0$.*

В работах [5, 6] удалось распространить теорию на другие случаи, рассмотрев почти все возможности. Приведем для примера один характерный результат из [6].

Теорема 3. *Пусть* $\varphi \in C([0,T])$, *причем*

$$\varphi(0) \neq 0, \qquad \varphi(T) \neq 0. \tag{10}$$

Допустим, что ни один нуль характеристической функции (5) *не является собственным значением оператора* A. *Тогда однородная обратная задача* (1), (3) *имеет на* $[0,T]$ *только тривиальное решение* $u(t) \equiv 0$, $g = 0$.

Подчеркнем, что теоремы 2 и 3 не требуют никаких ограничений на оператор A, кроме *линейности* и *замкнутости*. Если отвлечься от ряда деталей, то общую идею доказательства можно выразить так (см. [6]). Характеристическая функция (5) имеет нули, по которым строится соответствующая система экспонент. Эта система заведомо неполна, поскольку ее ортогональное дополнение в пространстве $C([0,T])$ содержит функцию $\varphi(t) \not\equiv 0$. Но, когда дефект системы экспонент не слишком велик, обратную задачу (1), (3) удается свести к конечномерной модели, где все нетривиальные решения выражаются через элементарные решения вида (6), (7). Если ни один нуль характеристической функции (5) не является собственным значением оператора A, то элементарные решения отсутствуют, и в обратной задаче (1), (3) остается только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$, $g = 0$.

При оценке дефекта системы экспонент ключевую роль играют соображения работы [7], связанные с «методом частных» из теории целых функций [8]. Обычно величина дефекта зависит от степени вырождения функции $\varphi(t)$ на концах отрезка $[0,T]$. Этим объясняются требования типа (10). Их можно ослабить, но совсем отбросить нельзя, иначе возникают примеры обратных задач (1), (3), где природа нетривиальных решений никак не связана с собственными значениями оператора A и элементарными решениями из теоремы 1 (подробности см. в [6]).

Разработанная методика допускает перенос на близкие обратные задачи. Было бы полезно, в частности, изучить все возможности, которые появляются при замене в (2) финального переопределения $u(T) = u_1$ на интегральное условие

$$\int\limits_0^T u(t)\, d\mu(t) = u_1 \tag{11}$$

с той или иной функцией $\mu(t)$ ограниченной вариации на $[0,T]$. Недавние исследования (А. В. Карев, И. В. Тихонов), проведенные для случая

$\varphi(t) \equiv 1$ в уравнении (1) и $\mu(t) \equiv t$ в условии (11), подтвердили математическую актуальность такой тематики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. N. Y.; Basel : Marcel Dekker, 2000. 744 p.
2. *Эйдельман Ю. С.* Единственность решения обратной задачи для дифференциального уравнения в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 9. С. 1647–1649.
3. *Орловский Д. Г.* К задаче определения параметра эволюционного уравнения // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 9. С. 1614–1621.
4. *Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С.* Единственность решения двухточечной обратной задачи для абстрактного дифференциального уравнения с неизвестным параметром // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 8. С. 1132–1133.
5. *Тихонов И. В.* Соображения монотонности в обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения // Интегральные преобразования и специальные функции. Информ. бюллетень. 2001. Т. 2, № 1. С. 119–128.
6. *Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С.* Критерий единственности в обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения с нестационарным неоднородным слагаемым // Матем. заметки. 2005. Т. 77, вып. 2. С. 273–290.
7. *Любич Ю. И.* О собственных и присоединенных функциях оператора дифференцирования // Известия вузов. Матем. 1959. № 4. С. 94–103.
8. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956. 632 с.

УДК 517.518.82

ЗАДАЧА О НУЛЯХ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА НА МОДЕЛЬНОМ ПРИМЕРЕ СИММЕТРИЧНОГО МОДУЛЯ

И. В. Тихонов, В. Б. Шерстюков, Д. Г. Цветкович
(Москва, РФ)
ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com, dianacve@inbox.ru

Полиномы Бернштейна являются важным инструментом классического анализа (см. [1–3]). Недавно замечено [4], что в некоторых типичных ситуациях нули полиномов Бернштейна образуют регулярные структуры на комплексной плоскости. Дадим сейчас качественное описание распределения нулей полиномов Бернштейна в модельном примере симметричного модуля.

Пусть

$$f(x) = |2x - 1|, \qquad x \in [0,\, 1]. \tag{1}$$

Для функции (1) введем полиномы Бернштейна переменной $z \in \mathbb{C}$ по формуле

$$B_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{2k}{n} - 1 \right| C_n^k\, z^k (1-z)^{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$