но-ортогональные гармонические всплески (wavelets), удобные для точного (в виде рядов по гармоническим всплескам) и приближенного (с любой точностью в виде просто конструируемых гармонических многочленов) представления решений задачи Дирихле с непрерывными граничными условиями. При этом класс аналитически представляемых в явном виде построенных всплесков значительно шире исходных для нашей конструкции всплесков Мейера. В конструкции всплесков и в оценках точности приближения решений задачи Дирихле нами использованы также некоторые идеи и результаты К. И. Осколкова [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Субботин Ю. Н., Черных Н. И.* Интерполяционно-ортогональные системы всплесков // Тр. ИММ УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 153–161.
2. *Субботин Ю. Н., Черных Н. И.* Всплески в пространствах гармонических функций // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64, № 1. С. 145–174.
3. *Субботин Ю. Н., Черных Н. И.* Гармонические всплески в краевых задачах // Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона – Якоби : тр. междунар. сем., посв. 60-летию акад. А. И. Субботина. Екатеринбург, 2005. Т. 1. С. 38–47.
4. *Offin D., Oskolkov K.* A note on orthonormal polynomial bases and wavelets // Constr. Approx. 1963. № 9. P. 319–325.

УДК 517.984

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ФУРЬЕ ПО ПОЛИНОМАМ, ОРТОГОНАЛЬНЫМ НА НЕРАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ С ЕДИНИЧНЫМ ВЕСОМ

М. С. Султанахмедов (Махачкала, РФ)

sultanakhmedov@gmail.com

Пусть $\eta_j (0 \leq j \leq N)$ — система точек, заданных на отрезке $[-1, 1]$ и таких что $-1 = \eta_0 < \eta_1 < \eta_2 < \cdots < \eta_{N-1} < \eta_N = 1$. Введем обозначения $\triangle\, \eta_j = \eta_{j+1} - \eta_j$ $(0 \leq j \leq N-1)$, $\lambda_N = \max_{0 \leq j \leq N-1} \triangle\, \eta_j$. Пусть, кроме того, на каждом частичном отрезке $[\eta_j, \eta_{j+1}]$ выбрана точка $t_j (\eta_j \leq t_j \leq \eta_{j+1})$. Тогда мы можем составить сетку $\Omega_N = \{t_j\}_{j=0}^{N-1}$, в которой будем считать узлы t_j попарно различными ($t_i \neq t_j$, при $i \neq j$).

Рассмотрим пространство $l_2(\Omega_N)$ дискретных функций вида $f : \Omega_N \to R$, в котором скалярное произведение задано следующим образом

$$< f, g >= \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) g(t_j) \triangle\, \eta_j.$$

Через $\hat{P}_{n,N}(t) \quad (0 \leq n \leq N-1)$ обозначим полиномы, образующие ортонормированную систему относительно этого скалярного произведения:

$$< \hat{P}_{n,N}, \hat{P}_{m,N} >= \delta_{nm} = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m. \end{cases}$$

Будем называть полиномы $\hat{P}_{n,N}(t) \quad (0 \leq n \leq N-1)$ дискретными ортонормированными полиномами Лежандра.

Пусть теперь задана некоторая функция $f \in l_2(\Omega_N)$. Обозначим через $\Lambda_{n,N}(f,t)$ частичную сумму Фурье порядка n этой функции по системе $\left\{\hat{P}_{k,N}\right\}_{k=0}^{N-1}$, т.е.

$$\Lambda_{n,N}(f,t) = \sum_{k=0}^{n} \hat{f}_k \hat{P}_{k,N}(t), \quad \text{где} \quad \hat{f}_k = \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j)\hat{P}_{k,N}(t_j) \vartriangle \eta_j.$$

Рассматривается задача оценки погрешности приближения функции $f(t)$ соответствующей частичной суммой $\Lambda_{n,N}(f,t)$ в равномерной метрике. Хорошо известно, что погрешность приближения частичной суммой $\Lambda_{n,N}(f,t)$ может быть оценена следующим образом

$$R_{n,N}(f,t) = |f(t) - \Lambda_{n,N}(f,t)| \leq E_n(f)\left(1 + L_{n,N}(t)\right),$$

где $E_n(f)$ — наилучшее приближение функции f полиномом степени не выше n в равномерной метрике пространства $C[-1,1]$, $L_{n,N}(t)$ — функция Лебега для полиномов $\left\{\hat{P}_{n,N}\right\}_{n=0}^{N-1}$:

$$L_{n,N}(t) = \sum_{j=0}^{N-1} \left| \sum_{k=0}^{n} \hat{P}_{k,N}(t_j)\hat{P}_{k,N}(t) \right| \vartriangle \eta_j.$$

Таким образом, для оценки величины $R_{n,N}(f,t)$ требуется оценить $L_{n,N}(t)$. При решении этой задачи существенно используются результаты работы [1]. В частности, из них следует, что существует такая константа $a > 0$, что при $2 \leq n \leq a\lambda_N^{-\frac{1}{3}}$ справедлива весовая оценка

$$\left|\hat{P}_{n,N}(t)\right| \leq c(a)\left(1 + B\sqrt{n^3\lambda_N}\right)\left(\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

где

$$B = \left(\frac{3 - 4\lambda_N \chi n^2}{1 - 16\lambda_N^2\chi^2 n^4}\right)^{\frac{1}{2}},$$

здесь $c(a)$ — положительная константа, χ — наименьшая из констант в интегральном неравенстве Маркова для оценки производной алгебраического многочлена:

$$\int\limits_{-1}^{1} |q'_m(t)|dt \leq \chi m^2 \int\limits_{-1}^{1} |q_m(t)|dt.$$

Используя указанную весовую оценку, в настоящей работе доказана следующая

Теорема. *Существует такое достаточно малое фиксированное число a, что при $2 \leq n \leq a\lambda_N^{-1/3}$ имеет место оценка*

$$L_{n,N}(t) \leq c(a)C_{n,N} \left[\ln n + \left(\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}\right], \quad t \in [-1, 1],$$

где

$$C_{n,N} = \sqrt{\frac{\hat{k}_{n,N}\hat{P}_{n+1,N}(1)}{\hat{k}_{n+1,N}\hat{P}_{n,N}(1)}}.$$

Следствие. *Для каждой последовательности $A = (a_2, a_3, \ldots)$, такой что $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$, и каждого $2 \leq n \leq a_N\lambda_N^{-1/3}$ имеет место оценка*

$$L_{n,N}(t) \leq c_N(A) \left[\ln n + \left(\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}\right], \quad t \in [-1, 1].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Султанахмедов М.С.* Асимптотические свойства и весовые оценки полиномов, ортогональных на неравномерной сетке с весом Якоби // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 1. С. 38–46.

УДК 517.9

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

И. В. Тихонов (Москва, РФ)

ivtikh@mail.ru

Дадим краткий обзор к одному из направлений теории обратных задач, понимаемых в смысле [1]. Речь идет о восстановлении неточно заданного неоднородного слагаемого в линейном эволюционном уравнении.