УДК 517.98

АНАЛОГИ ТЕОРЕМЫ ШАУДЕРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АНТИКОМПАКТОВ[1]

Ф. С. Стонякин (Симферополь, РФ)
fedyor@mail.ru

Хорошо известна теорема Шаудера, утверждающая существование неподвижной точки всякого отображения $f : B \to B$, где B — выпуклый компакт в банаховом пространстве E. Если же выпуклое множество B замкнуто и ограничено в E, то результат остаётся верным в случае предкомпактности $f(B)$.

Мы предлагаем подход к теоремам о неподвижных точках для ограниченного замкнутого множества B в банаховом пространстве, но без требования предкомпактности образа $f(B)$ (что, естественно приводит к ограничениям нового типа). Этот метод основан на понятии антикомпакта в банаховых пространствах, которое предложено нами ранее (см. [1]). Замкнутое выпуклое симметричное множество C' в банаховом пространстве E называется антикомпактом, если в пространстве $E_{C'} = (span\, C', ||\cdot||_{C'})$ ($||\cdot||_{C'} = p_{C'}(\cdot)$ — функционал Минковского; $E_{C'}$ пополнено относительно $||\cdot||_{C'}$) содержится и предкомпактно всякое ограниченное множество $B \subset E$. Иными словами, E инъективно компактно вложено в $E_{C'}$. Обозначим через $\mathcal{C}'(E)$ набор антикомпактов в банаховом пространстве E. Доказано, что E имеет антикомпакт тогда и только тогда, когда в пространстве E существует счётное тотальное множество линейных непрерывных функционалов $T_0 = \{\ell_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E^*$: $\ell_n(x) = \ell_n(y)\, \forall n \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow x = y$ (здесь и всюду далее будем полагать, что $\|\ell_n\|_{E^*} \leqslant 1\ \forall\ n \in \mathbb{N}$). Примером антикомпактов, соответствующих T_0 в таких пространствах E может служить система множеств:

$$C_\varepsilon = \left\{ x \in E \,\middle|\, \sup \left| \frac{\ell_k(x)}{\varepsilon_k} \right| \leqslant 1 \right\}, \tag{1}$$

где $\varepsilon = (\varepsilon_k > 0)_{k=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность положительных чисел, сходящаяся к $+\infty$ [1].

Перейдём к изложению полученных аналогов теоремы Шаудера. Условимся всюду далее через $\overline{B_{E_{C'}}}$ мы будем обозначать замыкание множества $B \subset E \subset E_{C'}$ в пространстве $E_{C'}$. Сначала отметим очевидный факт, вытекающий из обычный теоремы Шаудера в в пространстве $E_{C'}$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских учёных-кандидатов наук (проект МК-2915.2015.1).

Предложение 1. *Пусть B — ограниченное выпуклое подмножество в банаховом пространстве $E, f : B \to B$ и существует антикомпакт $C' \in \mathcal{C}'(E)$: $\overline{B_{E_{C'}}} = B$ и $f : B \to B$ непрерывно в пространстве $E_{C'}$. Тогда существует $x_0 \in B$: $f(x_0) = x_0$.*

Однако условия $\overline{B_{E_{C'}}} = B$ и непрерывности f в пространстве $E_{C'}$ выглядят несколько искусственными и трудно проверяемыми. Введём следующее понятие.

Определение 1. Для выпуклого ограниченного множества B будем называть отображение $f : B \to B$ *$E_{C'}$-равномерно непрерывным*, если $\forall\, x, y \in B$

$$\forall\, L > 0\ \exists\, \delta > 0 :\ ||x - y||_{C'} < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(y)||_{C'} < L.$$

Теорема 1. *Пусть B — выпукло и ограничено в банаховом пространстве E, $\mathcal{C}'(E) \neq \varnothing, f : B \to B$ $E_{C'}$-равномерно непрерывно при некотором $C' \in \mathcal{C}'(E)$. Тогда f можно единственным образом по непрерывности продолжить на $\overline{B_{E_{C'}}} \subset E_{C'}$ (продолжение будем также обозначать через f) и существует $x_0 \in \overline{B_{E_{C'}}} : f(x_0) = x_0$.*

Построены конкретные примеры отображений f, к которым применима теорема 1. Оказывается, при выборе системы антикомпактов (1) можно в теореме 1 заменить условие E_{C_ε}-равномерной непрерывности $f : B \to B$ (где B — ограниченное множество в пространстве E) на следующее условие T_0-равномерной непрерывности в E, связанное с соответствующим (1) счётным тотальным в E множеством $T_0 = \{\ell_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E^*$.

Определение 2. Пусть $B \subset E$ ограничено. Будем называть $f : B \to B$ *T_0-равномерно непрерывным*, если для всякого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $m_n \in \mathbb{N}$, что

$$\forall\, L > 0\ \exists\, \delta > 0 :\ |\ell_{m_n}(x - y)| < \delta \Rightarrow |\ell_n(f(x) - f(y))| < L.$$

T_0-равномерная непрерывность влечёт E_{C_ε}-равномерную непрерывность при всяком выборе последовательности ε из (1). Отметим, что T_0-равномерно непрерывным будет всякое слабо равномерно непрерывное отображение.

Теорема 2. *Если множество B выпукло и ограничено в E, а отображение $f : B \to B$ T_0-равномерно непрерывно, то имеется последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$:*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \ell(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \ell(f(x_n)) \quad \forall \ell \in T_0$;

(ii) для всякой последовательности $\varepsilon = \{\varepsilon_k > 0\}_{k=1}^{\infty}$, сходящейся к $+\infty$, f можно единственным образом по непрерывности продолжить (продолжение мы тоже обозначим f) на $\overline{B_{E_{C_\varepsilon}}} \subset E_{C_\varepsilon}$, C_ε

удовлетворяет (1). *При этом существует* $x_0 \in \overline{B_{E_{C_\varepsilon}}}$ *такое, что* $\lim\limits_{n\to\infty} ||x_n - x_0||_{C_\varepsilon} = 0$ *и верно* $f(x_0) = x_0$.

Сделаем замечание по поводу связи T_0-равномерной непрерывности (или $E_{C'}$-равномерной непрерывности, $C' \in \mathcal{C}'(E)$) $f : B \to B$ с обычной равномерной непрерывностью: *T_0-равномерно непрерывное отображение f может быть разрывным (в том числе и слабо разрывным) в E*. Это показывает, что полученные нами аналоги теоремы о неподвижных точках можно использовать для некоторых разрывных отображений.

Обратим внимание на ещё одно обстоятельство: *неподвижная точка, существующая на $E_{C'}$ при некотором $C' \in \mathcal{C}'(E)$ по теореме 2 может не лежать в B и даже в пространстве E*. Тем не менее, сделаем такие замечания по этому поводу:

1. Если E *рефлексивно* и $\mathcal{C}'(E) \neq \varnothing$, то применяя слабую секвенциальную компактность в E всякого замкнутого ограниченного выпуклого множества, можно доказать в условиях теоремы 1 и замкнутости B существование такого $x_0 \in B$, что $f(x_0) = x_0$.

2. *Принадлежность $x_0 = f(x_0)$ исходному пространству E для замкнутого выпуклого B возможна и в некоторых нерефлексивных пространствах.* Например, такой пример можно построить в пространстве $E = \ell_\infty$ (т. е. можно построить E_{C_ε}-непрерывное отображение $f : B \to B$ такое, что $x_0 \in E$).

Обсуждаются вопросы приложений полученных результатов в многозначном анализе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стонякин Ф. С.* Аналог теоремы Ула о выпуклости образа векторной меры // Динамические системы. 2013. Т. 3(31), № 3–4. С. 281–288.

УДК 517.5

ИНТЕРПОЛЯЦИОННО-ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВСПЛЕСКИ В КРУГЕ И ЕГО КОНФОРМНЫХ ОБРАЗАХ[1]

Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных (Екатеринбург, РФ)
yunsub@imm.uran.ru, chernykh@imm.uran.ru

На базе интерполяционно-ортогональных всплесков, построенных авторами в работах [1–3] сконструированы интерполяционно-ортогональные гармонические кратно-масштабные анализаторы и интерполяцион-

[1]Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00702).