СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mahler K.* Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus // J. Reine Angew. Math. 1931. Vol. 166. P. 118–150.

2. *Wielonsky F.* Asymptotics of Diagonal Hermite-Padé Approximants to e^z // J. Approx. Theory. 1997. Vol. 90, № 2. P. 283–298.

3. *Астафьева А. В., Старовойтов А. П.* Асимптотические свойства многочленов Эрмита // Докл. НАН Беларуси. 2015. Т. 59, № 3. С. 5–11.

УДК 517.538.52+517.538.53

О ЛОКАЛИЗАЦИИ НУЛЕЙ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА – ПАДЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

А. П. Старовойтов, Е. П. Кечко (Гомель, РБ)
svoitov@gsu.by, ekechko@gmail.com

Для заданного натурального числа k, рассмотрим произвольный фиксированный набор $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ различных комплексных и произвольный набор $\{n_p\}_{p=0}^k$ целых неотрицательных чисел.

Аппроксимациями Эрмита – Паде I типа (Latin type) системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$ называют многочлены $A_{n_p}^p(z)$, $\deg A_{n_p}^p \leqslant n_p - 1$, $p = 0, 1, ..., k$, хотя бы один из которых тождественно не равен нулю, удовлетворяющие условию

$$\sum_{p=0}^{k} A_{n_p}^p(z)\, e^{\lambda_p z} = O\left(z^{n_0+n_1+\ldots+n_k-1}\right), \quad z \to 0\,. \tag{1}$$

Если $n_0 = n_1 = \ldots = n_k = n$, то элементы множества $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^k$ называют *диагональными аппроксимациями Эрмита – Паде I типа* системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$ (по поводу терминологии см. [1]).

Такие многочлены введены Эрмитом спустя 10 лет после выхода в свет его знаменитой работы, посвящённой доказательству трансцендентности числа e. К. Малером (см. [1]) установлено, что с их помощью можно также доказать трансцендентность числа e.

Мы хотим локализовать область, в которой находятся нули многочлена $A_{n_p}^p(z)$, в зависимости от выбора чисел $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ и $\{n_p\}_{p=0}^k$. В отдельных частных случаях такая задача хорошо известна. Так Г. Сеге [2] исследовал поведение нулей многочленов Тейлора функций, связанных с экспонентой. Э. Сафф и Р. Варга [3] нашли границы кольца, в котором находятся нули многочленов Паде $p_{n,m}(z) = -A_n^0(z)$, $q_{n,m}(z) = A_m^1(z)$ экспоненциальной функции. Им принадлежит следующее утверждение, которое часто называют «теоремой о кольце».

Теорема 1 (Э. Сафф, Р. Варга). *При $n \geqslant 2$ и $m \geqslant 1$ все нули многочленов Паде $p_{n,m}(z)$, $q_{n,m}(z)$ функции $\exp z$ лежат в кольце*

$$K = \{z : (n+m-2)\mu < z < n+m-2/3\},$$

где $\mu = 0.278465$ — единственный положительный корень уравнения $te^{t+1} = 1$.

В работе [4] Ф. Вилонский получил оценку сверху для модулей нулей диагональных аппроксимаций Эрмита – Паде $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^k$ системы экспонент $\{e^{pz}\}_{p=0}^k$. Г. Шталь [5] исследовал расположение нулей преобразованных с помощью масштабирования независимой переменной квадратичных диагональных аппроксимаций Эрмита – Паде I и II типов системы экспонент $\{1, e^z, e^{2z}\}$ и показал, что указанные нули лежат на специальных дугах комплексной плоскости.

Если не принимать во внимание одномерный случай, когда аппроксимации Эрмита – Паде совпадают с достаточно хорошо изученными классическими аппроксимациями Паде, то можно сказать, что в настоящее время недиагональные аппроксимации Эрмита – Паде остаются практически не исследованными (см. [6]).

Сформулируем основной результат.

Теорема 2. *Пусть $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ — произвольные различные комплексные числа. Тогда при $n_p \geqslant 2$, $p = 0, 1, ..., k$, $k \geqslant 1$ нули многочлена $A_{n_p}^p(z)$, $0 \leqslant p \leqslant k$, находятся в круге $\{z : |z| < R_{n_p}^p\}$, где*

$$R_{n_p}^p = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq p}}^{k} \frac{n_p + n_j - 2/3}{|\lambda_p - \lambda_j|}\,. \tag{2}$$

При $k = 1$, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $n_0 = n$, $n_1 = m$ из теоремы 2 следует, что все нули многочленов Паде $q_{n,m}(z)$, $p_{n,m}(z)$ лежат в круге $\{z : |z| < n+m-2/3\}$, что согласуется с теоремой Э. Саффа, Р. Варги.

Если $k \geqslant 2$, $\lambda_p = p$, $p = 0, 1, ..., k$; $n_0 = n_1 = ... = n_k = n$, то из (2) в качестве следствия вытекает теорема 2.2 из работы [4] Ф. Вилонского: *все нули многочлена $A_n^p(z)$, принадлежат кругу $\{z : |z| < R_n^p\}$, где*

$$R_n^p = 2(n-1/3)\left[\sum\nolimits_{j=1}^{p} 1/j + \sum\nolimits_{j=1}^{k-p} 1/j\right].$$

При тех же условиях, что и в теореме Ф. Вилонского, но для произвольных различных действительных $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$, из теоремы 2 следует утверждение, доказанное в работе [7]: *все нули многочлена $A_n^p(z)$, лежат в круге*

$\{z : |z| < R_n^p\}$, *где*

$$R_n^p = 2(n - 1/3)\left[\sum\nolimits_{j=1}^{p} 1/|\lambda_p - \lambda_j| + \sum\nolimits_{j=1}^{k-p} 1/|\lambda_{p+j} - \lambda_p|\right].$$

В случаях, когда $p = 0$ или $p = k$, соответственно, первая и вторая суммы в скобках в двух последних равенствах равны нулю.

Согласно теореме 2 нули многочленов Эрмита $A_{n_p}^p(z)$ лежат в круге с центром в нуле, радиус которого $R_{n_p}^p$ зависит как от степени многочленов, так и от взаимного расположения множителей в показателях экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$. В связи с этим представляет интерес вопрос о точности полученной в теореме 2 верхней оценки для модулей нулей $A_{n_p}^p(z)$ в случае, когда n_p — фиксированы, а расстояние между соседними членами последовательности $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ является сколь угодно малой величиной.

Прежде чем перейти к примерам, заметим, что известные представления многочленов $A_{n_p}^p(z)$ позволяет получить для них явные выражения, а при $2 \leqslant n_p \leqslant 4$ найти точные значения всех нулей.

Рассмотрим систему экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^3$, где

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = 1 - \varepsilon, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 1 + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Нами установлено, что для рассматриваемой системы экспонент при $2 \leqslant n_p \leqslant 4$ полученные в теореме 2 неравенства для модулей нулей соответствующих многочленов Эрмита – Паде являются точными в смысле порядка при $\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon \to 1)$.

Примеры, подтверждающие точность полученных в теореме 2 неравенств в диагональном случае, имеются в работе [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mahler K.* Perfect systems// Comp. Math. 1968. Vol. 19. P. 95–166.

2. *Szegö G.* Über eienige Eigenschaften der Exponentialreihe// Sitzunggsberichte Berliner Math. Ges. 1924. Vol. 23. P. 50–64.

3. *Saff E., Varga R.* On the zeros and poles of Pade approximations to e^z, II, in "Pade and Rational Approximations: Theory and Applications". N. Y. : Academic Press, 1977.

4. *Wielonsky F.* Asymptotics of Diagonal Hermite-Padé Approximants to e^z // J. Approx. Theory. 1997. Vol. 90, № 2. P. 283–298.

5. *Stahl H.* Asymptotics for quadratic Hermite-Padé polynomials associated with the exponential function // Electronic Trans. Num. Anal. 2002. № 14. P. 193–220.

6. *Driver K.* Nondiagonal Hermite – Padé approximation to the exponential funktion // J. Comput. Appl. Math. 1995. Vol. 65. P. 125–134.

7. *Астафьева А. В., Кечко Е. П., Старовойтов А. П.* О нулях многочленов Эрмита // Изв. Гомель. гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2015. № 3(90). С. 104–110.