Лемма. *Пусть* $f = h + \overline{g} \in S_H^0 = \{f \in S_H : g'(0) = 0\}$. *Тогда для всех* $z_1, z_2 \in \Delta : |z_1| = |z_2| = r \in (0,1)$, *справедливо неравенство*

$$|f(z_2) - f(z_1)| \geq |z_2 - z_1| \frac{1}{4\alpha r} \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{\alpha} \left[1 - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{2\alpha} \right],$$

где $\alpha = \operatorname{ord} S_H = \sup\limits_{f \in S_H} |h''(0)/2|$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Starkov V. V.* Univalence of harmonic functions, hypothesis of Ponnusamy and Sairam, and constructions of univalent polynomials // Probl. Anal. Issues Anal. 2014. Vol. 3(21), № 2. P. 59–73. DOI:10.15393/j3.art.2014.2729.

2. *Graf S. Yu., Ponnusamy S., Starkov V. V.* Univalence criterion for harmonic mappings and Φ-like functions. arXiv:1510.04886v1 [math.CV] 16 Okt 2015. 14 p.

УДК 517.538.52+517.538.53

АСИМПТОТИКА АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА – ПАДЕ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ[1]

А. П. Старовойтов, Г. Н. Казимиров, М. В. Сидорцов
(Гомель, РБ)
svoitov@gsu.by, grigory.kazimirov@gmail.com, sidortsov@mail.ru

Диагональными аппроксимациями Эрмита – Паде I типа (Latin type) для системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$ называют многочлены $A_n^p(z)$, $deg\, A_n^p \leqslant n-1$, $p = 0, 1, ..., k$, хотя бы один из которых тождественно не равен нулю, удовлетворяющие условию

$$\sum_{p=0}^{k} A_n^p(z)\, e^{\lambda_p z} = O(z^{nk+n-1}), \;\; z \to 0\,.$$

Многочлены $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^k$ введены Эрмитом спустя 10 лет после выхода в свет его знаменитой работы, посвящённой доказательству трансцендентности числа e. К. Малером [1] установлено, что с их помощью можно также доказать трансцендентность числа e.

В работах [2, 3] найдена асимптотика многочленов $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^k$ в случае, когда $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ — различные действительные числа. Исходя из этих результатов, легко описать асимптотику аппроксимаций Эрмита – Паде, в случае, когда $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ — различные комплексные числа, лежащие на одной прямой, проходящей через начало координат, в том числе, на мнимой

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь.

оси. Для произвольных комплексных множителей в показателях экспонент, описание асимптотик соответствующих аппроксимаций известными в настоящее время методами не представляется возможным.

В данной работе исследуется асимптотика диагональных аппроксимаций Эрмита – Паде I типа для системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^{k}$, в предположении, что $\{\lambda_p\}_{p=0}^{k}$ являются корнями уравнения

$$\varphi(\xi) := \xi(\xi^k - 1) = 0\,,$$

т.е.

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_p = e^{i\,2\pi(j-1)/k}, \quad j = 1, 2, ..., k.$$

Если обозначить через $\{x_j\}_{j=1}^{k}$ все решения уравнения $\varphi'(\xi) = 0$, то легко заметить, что

$$x_j = \frac{1}{\sqrt[k]{k+1}}\; e^{i\,2\pi(j-1)/k}, \quad j = 1, 2, ..., k.$$

В окрестности точки x_1 выделим однозначную ветвь функции $S(\xi) = -\ln\varphi(\xi)$, полагая $S(x_1) = -\left[\ln|\varphi(x_1)| + i\pi\right]$. Пусть G такая односвязная область, что $\{x_j\}_{j=1}^{k} \subset G \subset \mathbb{C}\setminus\{\lambda_p\}_{p=0}^{k}$. Выбранная ветвь аналитически продолжается в G. Полученная в результате продолжения функция является однозначной аналитической функцией в G. Её значения в G вычисляются по формуле

$$S(\xi) = -\left[\ln|\varphi(\xi)| + i\pi + i\triangle_\gamma \arg\varphi(\xi)\right]\,,$$

где кривая γ лежит в G и соединяет точки x_1 и ξ, а $\triangle_\gamma \arg\varphi(\xi)$ — приращение аргумента $\varphi(\xi)$ вдоль кривой γ.

Пусть

$$B_n(x_j) := \frac{1}{2\pi i}\sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_j)}}\; e^{nS(x_j)}, \quad j = 1, 2, ..., k\,.$$

Здесь ветвь корня определяется условием

$$\arg\sqrt{\frac{-1}{S''(x_j)}} = \varphi_0\,,$$

где φ_0 — угол между вектором касательной к окружности $\{z\,:\,|z| = \frac{1}{\sqrt[k]{k+1}}\}$ в точке x_j, проходимой по часовой стрелке, и положительным направлением действительной оси.

Сформулируем основной результат.

Теорема. *Для любого фиксированного z при $n \to \infty$*

$$A_n^0(z) = \sum_{j=1}^{k} B_n(x_j)\ \ e^{(x_j-\lambda_j)z}\,(1+O(1/n))\ ,$$

$$A_n^p(z) = -B_n(x_p)\ \ e^{(x_p-\lambda_p)z}\,(1+O(1/n))\ , \quad j=1,2,...,k\,.$$

Следствие 1. *При $k=3$ и $n \to \infty$ для любого фиксированного z*

$$A_n^1(z) = (-1)^{n-1}\,\Lambda_n\ e^{(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}-1)z}\,(1+O(1/n))\ ,$$

$$A_n^2(z) = e^{i\pi(n-1)/3}\,\Lambda_n\ e^{(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}e^{i2\pi/3}-1)z}\,(1+O(1/n))\ ,$$

$$A_n^3(z) = e^{-i\pi(n-1)/3}\,\Lambda_n\ e^{(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}e^{-i2\pi/3}-1)z}\,(1+O(1/n))\ ,$$

$$A_n^0(z) = \Lambda_n\ e^{-z}\Big[(-1)^n e^{\frac{z}{\sqrt[3]{4}}} - e^{i\pi(n-1)/3}e^{\frac{z}{\sqrt[3]{4}}e^{i2\pi/3}} -$$

$$-e^{-i\pi(n-1)/3}e^{\frac{z}{\sqrt[3]{4}}e^{-i2\pi/3}}\Big](1+O(1/n))\ ,$$

где

$$\Lambda_n = \frac{1}{\sqrt{16\sqrt[3]{2}\,\pi n}}\ \left(\frac{4^{4/3}}{3}\right)^n .$$

Следствие 2. *При $k=4$ и $n \to \infty$ для любого фиксированного z*

$$A_n^1(z) = (-1)^{n-1}\,\Omega_n\ e^{(\frac{1}{\sqrt[4]{5}}-1)z}\,(1+O(1/n))\ ,$$

$$A_n^2(z) = i^{n-1}\,\Omega_n\ e^{(\frac{i}{\sqrt[4]{5}}-1)z}\,(1+O(1/n))\ ,$$

$$A_n^3(z) = \ \Omega_n\ e^{(-\frac{1}{\sqrt[4]{5}}-1)z}\,(1+O(1/n))\ ,$$

$$A_n^4(z) = (-i)^{n-1}\,\Omega_n\ e^{(-\frac{i}{\sqrt[4]{5}}-1)z}\,(1+O(1/n))\ ,$$

$$A_n^0(z) = \ \Omega_n\ e^{-z}\Big[(-1)^n e^{\frac{z}{\sqrt[4]{5}}} - i^{n-1}e^{\frac{i\,z}{\sqrt[4]{5}}} -$$

$$-e^{-\frac{z}{\sqrt[4]{5}}} + (-1)^n\,(i^{n-1})\,e^{-\frac{i\,z}{\sqrt[4]{5}}}\Big](1+O(1/n))\ ,$$

где

$$\Omega_n = \frac{1}{\sqrt{10\sqrt{5}\,\pi n}}\left(\frac{5^{5/4}}{4}\right)^n .$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mahler K.* Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus // J. Reine Angew. Math. 1931. Vol. 166. P. 118–150.

2. *Wielonsky F.* Asymptotics of Diagonal Hermite-Padé Approximants to e^z // J. Approx. Theory. 1997. Vol. 90, № 2. P. 283–298.

3. *Астафьева А. В., Старовойтов А. П.* Асимптотические свойства многочленов Эрмита // Докл. НАН Беларуси. 2015. Т. 59, № 3. С. 5–11.

УДК 517.538.52+517.538.53

О ЛОКАЛИЗАЦИИ НУЛЕЙ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА – ПАДЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

А. П. Старовойтов, Е. П. Кечко (Гомель, РБ)
svoitov@gsu.by, ekechko@gmail.com

Для заданного натурального числа k, рассмотрим произвольный фиксированный набор $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ различных комплексных и произвольный набор $\{n_p\}_{p=0}^k$ целых неотрицательных чисел.

Аппроксимациями Эрмита – Паде I типа (Latin type) системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$ называют многочлены $A_{n_p}^p(z)$, $\deg A_{n_p}^p \leqslant n_p - 1$, $p = 0, 1, ..., k$, хотя бы один из которых тождественно не равен нулю, удовлетворяющие условию

$$\sum_{p=0}^{k} A_{n_p}^p(z)\, e^{\lambda_p z} = O\left(z^{n_0+n_1+\ldots+n_k-1}\right), \quad z \to 0\,. \tag{1}$$

Если $n_0 = n_1 = ... = n_k = n$, то элементы множества $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^k$ называют *диагональными аппроксимациями Эрмита – Паде I типа* системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$ (по поводу терминологии см. [1]).

Такие многочлены введены Эрмитом спустя 10 лет после выхода в свет его знаменитой работы, посвящённой доказательству трансцендентности числа e. К. Малером (см. [1]) установлено, что с их помощью можно также доказать трансцендентность числа e.

Мы хотим локализовать область, в которой находятся нули многочлена $A_{n_p}^p(z)$, в зависимости от выбора чисел $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ и $\{n_p\}_{p=0}^k$. В отдельных частных случаях такая задача хорошо известна. Так Г. Сеге [2] исследовал поведение нулей многочленов Тейлора функций, связанных с экспонентой. Э. Сафф и Р. Варга [3] нашли границы кольца, в котором находятся нули многочленов Паде $p_{n,m}(z) = -A_n^0(z)$, $q_{n,m}(z) = A_m^1(z)$ экспоненциальной функции. Им принадлежит следующее утверждение, которое часто называют «теоремой о кольце».