7. *Чебышев П. Л.* Théorie des mécanismes connes sous le norm de parallélogrammes // Mémoires présentés a l'Acad. Imp. des Sci. de St.-Pétersbourg pae divers savants. 1854. B. 7. P. 539–568

УДК 517.54

ПЛОСКИЕ ОДНОЛИСТНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ[1]

В. В. Старков (Петрозаводск, РФ)
VstarV@list.ru

Теория таких отображений стала активно развиваться с 80-х годов прошлого века после решения проблемы Бибербаха об оценке коэффициентов в классе S голоморфных и однолистных в круге $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ функций $f(z) = z + \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_n z^n$. При изучении однолистных гармонических в Δ функций f по аналогии с S обычно тоже вводят нормировку в нуле: $f(0) = 0, f_z(0) = 1$. Каждую комплекснозначную гармоническую в односвязной области функцию f можно представить в виде $f = h + \bar{g}$, где f и g — голоморфные функции в этой области.

Из-за широты класса S_H однолистных гармонических функций (по сравнению с S) информацию о функциях из S_H получать сложнее, свойства классов S и S_H существенно различны. Этим, в частности, объясняется отсутствие до 2014 г. критерия однолистности [1] для гармонических функций; сейчас этот критерий активно используется у нас и за рубежом.

В докладе в основном будут представлены результаты, связанные с новым критерием однолистности [2]:

Теорема. *Пусть f гармоническая в выпуклой области D и $\Omega = f(D)$. Функция f однолистна в D, если, и только если, существует такая комплекснозначная функция $\phi = \phi(w, \overline{w}) \in C^1(\Omega)$, что для любого $\epsilon \in \partial\Delta$ существует вещественное $\gamma = \gamma(\epsilon)$, удовлетворяющее неравенству*

$$\mathrm{Re}\big\{e^{i\gamma}\big(\partial\phi(f(z), \overline{f(z)}) + \epsilon\overline{\partial}\phi(f(z), \overline{f(z)})\big)\big\} > 0 \quad \forall z \in D,$$

где $\partial = \frac{\partial}{\partial z}$ *и* $\overline{\partial} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}$.

Самостоятельный интерес для приложений представляет собой следующая лемма, доказанная в [1] и уточненная в [2]

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 14-01-92692, № 14-01-00510).

Лемма. *Пусть* $f = h + \overline{g} \in S_H^0 = \{f \in S_H : g'(0) = 0\}$. *Тогда для всех* $z_1, z_2 \in \Delta: |z_1| = |z_2| = r \in (0,1)$, *справедливо неравенство*

$$|f(z_2) - f(z_1)| \geq |z_2 - z_1| \frac{1}{4\alpha r} \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\alpha} \left[1 - \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{2\alpha}\right],$$

где $\alpha = \operatorname{ord} S_H = \sup\limits_{f \in S_H} |h''(0)/2|$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Starkov V. V.* Univalence of harmonic functions, hypothesis of Ponnusamy and Sairam, and constructions of univalent polynomials // Probl. Anal. Issues Anal. 2014. Vol. 3(21), № 2. P. 59–73. DOI:10.15393/j3.art.2014.2729.

2. *Graf S. Yu., Ponnusamy S., Starkov V. V.* Univalence criterion for harmonic mappings and Φ-like functions. arXiv:1510.04886v1 [math.CV] 16 Okt 2015. 14 p.

УДК 517.538.52+517.538.53

АСИМПТОТИКА АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА – ПАДЕ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ[1]

А. П. Старовойтов, Г. Н. Казимиров, М. В. Сидорцов (Гомель, РБ)

svoitov@gsu.by, grigory.kazimirov@gmail.com, sidortsov@mail.ru

Диагональными аппроксимациями Эрмита – Паде I типа (Latin type) для системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^{k}$ называют многочлены $A_n^p(z)$, $deg\, A_n^p \leqslant n-1$, $p = 0, 1, ..., k$, хотя бы один из которых тождественно не равен нулю, удовлетворяющие условию

$$\sum_{p=0}^{k} A_n^p(z)\, e^{\lambda_p z} = O(z^{nk+n-1}), \quad z \to 0\,.$$

Многочлены $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^{k}$ введены Эрмитом спустя 10 лет после выхода в свет его знаменитой работы, посвящённой доказательству трансцендентности числа e. К. Малером [1] установлено, что с их помощью можно также доказать трансцендентность числа e.

В работах [2, 3] найдена асимптотика многочленов $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^{k}$ в случае, когда $\{\lambda_p\}_{p=0}^{k}$ — различные действительные числа. Исходя из этих результатов, легко описать асимптотику аппроксимаций Эрмита – Паде, в случае, когда $\{\lambda_p\}_{p=0}^{k}$ — различные комплексные числа, лежащие на одной прямой, проходящей через начало координат, в том числе, на мнимой

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь.