2. *Лосев А. Г., Мазепа Е. А.* Ограниченные решения уравнения Шредингера на римановых произведениях // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13, вып. 1. С. 84–110.

3. *Корольков С. А., Светлов А. В.* Краевые задачи для стационарного уравнения Шредингера в неограниченных областях римановых многообразий // Наука и образование в современной конкурентной среде : материалы междунар. науч.-практ. конф. : в 3-х частях. Уфа, 2014. С. 215–221.

4. *Korolkova E., Korolkov S., Svetlov A.* On solvability of boundary value problems for solutions of the stationary Schrödinger equation on unbounded domains of Riemannian manifolds // International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2014. Vol. 97, № 2. P. 231–240.

5. *Светлов А. В.* Критерий дискретности спектра оператора Лапласа–Бельтрами на квазимодельных многообразиях // Сиб. матем. журн. 2002. Т. 43, № 6. С. 1362–1371.

6. *Светлов А. В.* Спектр оператора Шреденгера на скрещенных произведениях // Вестн. Волоград. гос. ун-та. Сер. 1, Математика. Физика. 2002. № 7. С. 12–19.

7. *Svetlov A. V.* Discreteness criterion for the spectrum of the Schrödinger operator on weighted quasimodel manifolds // International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2013. Vol. 89, № 3. P. 393–400.

8. *Светлов А. В.* О спектре оператора Шредингера на многообразиях специального вида // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, № 4, ч. 2. С. 584–589.

УДК 517.5

ЗАДАЧА О ДВУХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПРЯМОУГОЛЬНИКАХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ И ПРОБЛЕМА МОРЕРЫ

В. Е. Силенко (Орехово-Зуево, РФ)
V.Silenko@bk.ru

В работе рассматриваются проблемы Помпейю и Мореры и их обобщения на гиперболической плоскости для случая двух гиперболических прямоугольников.

Ранее С. А. Вильямс для евклидового пространства $X = \mathbb{R}^n$, К. А. Беренстейн и М. Шахшахани в [1, следствие 1] для симметрического пространства $X = G/K$ некомпактного типа (с группой движений G) получили достаточные условия того, что данный компакт является множеством Помпейю. В связи с этим возникли задачи об исследовании нескольких множеств (например, задачи о двух кругах, трех квадратах в $\mathbb{R}^2$), а также задачи о нахождении дополнительных ограничений на класс функций, если рассматривается лишь подгруппа (например, сдвигов) группы G. Такие задачи были предметом исследований многих математиков, среди которых Д. Помпейю, Л. Браун, Ф. Шницер и А. Л. Шилдс, Л. Зальцман, К. А. Беренстейн, Б. А. Тейлор, П. Г. Лард, Р. Гэй, А. Ижер, Р. М. Тригуб, В. П. Заставный, В. В. Волчков, Вит. В. Волчков и другие.

В частности, точные условия на рост функций для случаев параллелепипеда и эллипсоида в $\mathbb{R}^n$ приведены в [2].

Автором получены точные условия на рост функций $f \in C(\mathbb{H}^2)$, для которых гиперболический прямоугольник является множеством Помпейю для группы “сдвигов” NA гиперболической плоскости $\mathbb{H}^2$. Найдены примеры функций с нулевыми интегралами по гиперболическим прямоугольникам, подтверждающие точность полученных условий. В теореме 1 приведено обобщение задачи на случай двух гиперболических прямоугольников, дающее решение задачи, поставленной В.В. Волчковым в [2, с. 229].

Проблема Помпейю тесно связана с классической теоремой Мореры из комплексного анализа. Исследуя проблему Мореры на гиперболической плоскости, М. Л. Аграновский в [3, теорема 1] получил общее условие $f \in L^2(\mathbb{H}^2)$, являющееся неточным для некоторых конкретных контуров и излишним для каждой кусочно-гладкой жордановой кривой, ограничивающей множество со свойством Помпейю. Для случая окружности неулучшаемые условия установлены В. В. Волчковым в [4, теорема 1].

Как применение вышеописанных задач типа Помпейю автором найдены новые обобщения теоремы Мореры. Для группы «сдвигов» гиперболической плоскости в [5] приведены условия на рост функций $f \in C(D)$, для которых граница гиперболического прямоугольника является множеством Мореры. В теореме 2 рассмотрен случай двух гиперболических прямоугольников. При этом показано, что условие $f \in L^2(D)$, накладывающее ограничения на поведение функции вблизи всей границы единичного круга D, можно заменить ограничениями на рост функции лишь в окрестности $z_0 = 1$. Найдены примеры функций с нулевыми интегралами по границам гиперболических прямоугольников, подтверждающие точность полученных условий.

Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — плоскость Лобачевского $\mathbb{H}^2$ с неевклидовым расстоянием $d(z_1, z_2) = \frac{1}{2}\ln\frac{|1-\overline{z}_1 z_2|+|z_2-z_1|}{|1-\overline{z}_1 z_2|-|z_2-z_1|}$ между точками $z_1, z_2 \in D$ и мерой $d\omega = \frac{dxdy}{(1-|z|^2)^2}$. Группа $G = SU(1,1)$ состоит из комплексных матриц $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{smallmatrix}\right)$ с определителем $|a|^2 - |b|^2 = 1$ и действует на D посредством отображений $g\circ z = \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}$. Разложение Ивасавы группы G имеет вид $G = KAN$, где $K = SO(2)$ – группа вращений $\mathbb{C}$, $A = \left\{a_t = \left(\begin{smallmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{smallmatrix}\right) : t \in \mathbb{R}\right\}$, $N = \left\{n_s = \left(\begin{smallmatrix} 1+is & -is \\ is & 1-is \end{smallmatrix}\right) : s \in \mathbb{R}\right\}$.

Для $\alpha > 0$, $l \in \mathbb{N}$ и $z \in D$ обозначим $\lambda_l(z) = \frac{e^{2l}(1-|z|^2)-(1+|z|^2-2z)}{e^{2l}(1-|z|^2)+(1+|z|^2-2\overline{z})}$ и назовем гиперболическим прямоугольником следующее множество

$$Q_\alpha = \{z = n_s a_t \circ 0 : 0 \le s \le \alpha,\ 0 \le t \le 1\}.$$

Теорема 1. *Пусть* $f \in C(D)$,

$$\forall z \in D \qquad f\left(\lambda_l(z)\right) = o\left(e^{2l}\right) \quad \text{при } l \to +\infty, \quad l \in \mathbb{N},$$

и для некоторых $\alpha_1, \alpha_2 > 0$

$$\iint\limits_{gQ_{\alpha_1}} f(z)\, d\omega = \iint\limits_{gQ_{\alpha_2}} f(z)\, d\omega = 0 \quad \text{для всех } g \in NA.$$

Тогда если $\alpha_1/\alpha_2 \notin \mathbb{Q}$, *или*

$$e^{-2} f\left(\lambda_1(z)\right) - f(z) = o\left(\frac{1}{|1-z|}\right) \quad \text{при } z \to 1 \text{ по орициклам},$$

то $f(z) \equiv 0$ *в* D.

Обозначим $M_f(z) = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \left(1 - |n_u a_v \circ z|^2\right) |f\left(n_u a_v \circ z\right)|\, du dv.$

Теорема 2. 1. *Пусть* $f \in C(D)$,

$$\forall z \in D \quad M_f(\lambda_l(z)) = o\,(1) \quad \text{при } l \to +\infty, \quad l \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

и для некоторых $\alpha_1, \alpha_2 > 0$

$$\int\limits_{\partial(gQ_{\alpha_1})} f(z)\, dz = \int\limits_{\partial(gQ_{\alpha_2})} f(z)\, dz = 0 \quad \text{для всех } g \in NA \tag{2}$$

Тогда если $\alpha_1/\alpha_2 \notin \mathbb{Q}$, *или*

$$M_f(z) = o\,(1) \quad \text{при } z \to 1 \text{ по орициклам}, \tag{3}$$

то $f(z)$ *голоморфна в* D.

2. *Для любых* $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ *существует неголоморфная функция* $f \in C^1(D)$, *удовлетворяющая* (2), (3) *и такая, что*

$$\forall z \in D \qquad M_f(\lambda_l(z)) = O\,(1) \quad \text{при } l \to +\infty, \quad l \in \mathbb{N}.$$

3. *Для любых соизмеримых* $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ *существует неголоморфная функция* $f \in C^1(D)$, *удовлетворяющая* (1), (2) *и такая, что*

$$M_f(z) = O\,(1) \quad \text{при } z \to 1 \text{ по орициклам}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Berenstein C. A. and Shahshahani M.* Harmonic analysis and the Pompeiu problem // Amer. J. Math. 1983. Vol. 105. P. 1217–1229.

2. *Volchcov V. V.* Integral geometry and convolution equations. Dordrecht. Boston. London: Kluwer Academic Publishers, 2003. 454 p.

3. *Аграновский М. Л.* Преобразование Фурье на $SL_2(\mathbb{R})$ и т еоремы типа Морера // ДАН СССР. 1978. Т. 243, № 6. С. 1353–1356.

4. *Волчков В. В.* Об одной проблеме Зальцмана и ее обобщениях // Матем. заметки. 1993. Т. 53, № 2. С. 30–36.

5. *Silenko V. E.* A new Morera-type theorem on a unit disk // Ukrainian Math. J. 2001. T. 53. № 2. P. 317–322.

УДК 517.518.862

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОЛИНОМЫ С ФИКСИРОВАННЫМИ СТАРШИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩИЕСЯ ОТ НУЛЯ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ НОРМЕ[1]

И. Е. Симонов (Екатеринбург, РФ)
Simonov.Ivan@urfu.ru

Пусть A_0, B_0, A_1, B_1, $\ldots$, A_s, B_s — фиксированные вещественные числа. Рассмотрим множество $\mathcal{T}_n^s$ тригонометрических полиномов

$$f_n(t) = \mathrm{Re}\,\left(C_0 e^{int} + \cdots + C_{n-s} e^{i(n-s)t} + \cdots\right), \quad C_k = A_k - iB_k$$

с фиксированными коэффициентами при $s+1$ старших гармониках. Требуется найти такой полином $f^*_{n,s} \in \mathcal{T}_n{}^s$, что

$$\|f^*_{n,s}\|_1 = \min_{f \in \mathcal{T}_n{}^s} \|f\|,$$

где

$$\|f\| = \int_0^{2\pi} |f(t)| dt.$$

Полином $f^*_{n,s}$ называют полиномом, наименее уклоняющимся от нуля в интегральной норме. С. Н. Бернштейн [1] выписал тригонометрический полином, наименее уклоняющийся от нуля в интегральной норме, при $s = 0$, а именно

$$f^*_{n,0}(t) = A_0 \cos nt + B_0 \sin nt.$$

Аналогичная задача для алгебраических многочленов, наименее уклоняющихся от нуля в интегральной норме, с фиксированными старшими коэффициентами изучена достаточно полно. А. Н. Коркин и

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке постановления № 211 Правительства Российской Федерации, контракт № 02.A03.21.0006 и РФФИ (проект № 15-01-02705)